

На правах рукописи

Углич Павел Сергеевич

**ОБРАТНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УПРУГО-ЖИДКИХ ВОЛНОВОДОВ**

01.02.04. - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону

2006

Работа выполнена на кафедре теории упругости Ростовского государственного университета

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор **Ватульян Александр Ованесович**

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор **Селезнев Михаил Георгиевич**

кандидат физико-математических наук,
доцент **Зеленцов Владимир Борисович**

Ведущая организация **Кубанский государственный университет**

Защита диссертации состоится «14» ноября 2006 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.06 по физико - математическим наукам в Ростовском государственном университете по адресу: 344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а, РГУ, механико-математический факультет, ауд 211.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке РГУ по адресу: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан «12» октября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Боев Н.В.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Задачи о колебаниях слоистых структур с неровностями часто возникают в акустике, сейсмологии, технической диагностике и физике твердого тела.

Наиболее популярным методом для решения таких задач в случае малых неровностей является метод возмущений (известный также под названиями метод малого параметра, метод линеаризации), суть которого состоит в предположении малости амплитуды неровности по сравнению с длиной волны; также в этом случае часто используется приближение однократного рассеяния — приближение Борна.

Если амплитуда неровности становится соизмеримой с длиной волны, метод возмущений становится неприменим. В это случае может быть использован метод граничного элемента, который для данного класса задач исследован недостаточно.

Кроме прямых задач значительный интерес представляют обратные задачи об определении формы неровной границы слоя, если известно поле перемещений на другом участке границы.

Цель работы состоит в исследовании прямых и обратных задач динамической теории упругости для слоистых структур с неровными границами раздела.

Методика исследований прямых задач основывается на сведении исходных краевых задач к граничным интегральным уравнениям на основании теоремы взаимности и фундаментальных решений для волноводов с ровными границами, причем решение систем интегральных уравнений осуществлено при помощи идей метода граничных элементов.

Обратная задача об определении формы неровного участка границы волновода в рамках процедуры линеаризации сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма с гладким ядром, для решения которого ис-

пользован метод регуляризации Тихонова.

Достоверность результатов работы основана на строгом аппарате математической теории упругости, на корректном сведении краевых задач для слоистых волноводов с неровными границами к системам граничных интегральных уравнений, на их численном анализе, сравнении результатов, полученными различными методами. Достоверность подтверждается результатами численных экспериментов, в которых варьировалась частота колебаний, форма неровности и другие параметры.

Научная новизна работы определяется разработкой методов решения, численным и асимптотическим исследованием ряда новых задач (прямых и обратных) об установившихся колебаниях упругих и упруго-жидких волноводов с неровными границами.

Практическая ценность результатов исследования состоит в развитии методов решения задач о распространении волн в слоистых структурах с нерегулярными границами и исследовании возможностей реконструкции формы неровной границы раздела в зависимости от частоты колебания и геометрических параметров задачи.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались на:

- VII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды.», Ростов-на-Дону, 22-24 октября 2001 г.
- III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, г.Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003.
- III-й школе-семинаре «Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика», Ростов-на-Дону, 15-19 ноября. 2004 г.
- IX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды.» Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.

- семинарах кафедры теории упругости Ростовского государственного университета.

Публикации. Автором опубликовано семь работ по теме диссертации, которые отражают ее основные результаты. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы из 130 наименований. Объем диссертации составляет 114 страниц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, коды проектов 02-01-01124, 05-01-00734 и гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущей научной школы НШ - 2113. 2003.1.

Содержание работы.

Введение содержит обзор литературы по исследованию прямых и обратных задач математической физики о распространении волн в полуограниченных с неровными границами.

Задачами математической физики о распространении волн в полуограниченных областях с неровными границами ранее занимались Бабешко В.А., Барсуков К.В., Бреховских Л.М., Буров В.А., Ватульян А.О., Викторов И.А., Ворович И.И., Гандурин Ю.Н., Гетман И.П., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Гуляев Ю.В., Дунин С.З., Захаренко А.Д., Косачев В.В., Коренский С.А., Крылов В.В., Максимов Г.А., Мацыпура В.Т., Мухсихачоян А., Ляпин А.А., Плесский Б.П., Прудников И.П., Селезнев М.Г., Сироткина Н.С., Уразаков Е.И., Устинов Ю.А., Фальковский А.А., Bruno O.P., Reitich F., Greffet J.J., Baylard C., Versaevel P., Maassarani Z. и многие другие авторы. Представлены основные методы исследования волновых процессов в волноводах с неровными границами-метод возмущений, метод граничных интегральных уравнений, сформулированы основные проблемы, рассматриваемые в работе и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена постановкам задач о колебаниях волноводов с неровным нижним основанием. Рассматриваются вынужденные установившиеся колебания полупространства, состоящего из упругого слоя, занимающего объем $0 \leq \varepsilon f(x_1, x_3) \leq H$ и идеальной сжимаемой жидкости, занимающей объем $x_2 \leq \varepsilon f(x_1, x_3)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Колебания вызываются нагрузкой $q_i(x_1, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, приложенной на верхней поверхности слоя. В дальнейшем считается, что нижняя поверхность цилиндрическая:

$$f(x_1, x_3) = f(x_1)$$

и функции нагрузки не зависят от переменной x_3 :

$$q_i(x_1, x_3) = q_i(x_1).$$

Считается, что функция $f(x_1)$ отлична от нуля только на отрезке $[a, b]$ и обращается на концах отрезка в нуль. Производится обезразмеривание координат по формулам: $\bar{x}_i = \frac{x_i}{H}$, $\bar{\omega} = \omega H$ (черта в дальнейшем опускается).

В зависимости от типа нагрузки и механических параметров рассматриваются три задачи:

Задача I (упруго-жидкий волновод). Для упругого слоя выполняются уравнения Ляме:

$$(1 - 2\nu)^{-1} u_{j,j i} + \Delta u_i + \kappa_2^2 u_i = 0 \quad (1)$$

где ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, $\kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, ω — частота колебаний, ρ — плотность слоя, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, u_i — вектор перемещений, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i = 1, 2$

Потенциал скоростей в жидкости удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \kappa_0^2 \varphi = 0 \quad (2)$$

$\kappa_2 = \frac{\omega}{c_0}$, c_0 — скорость звука в жидкости.

Краевые условия имеют следующий вид:

При $x_2 = 1$:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=1} = q_1(x_1) \\ \sigma_{22}|_{x_2=1} = q_2(x_1) \end{cases} \quad (3)$$

при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$:

$$\begin{cases} \sigma_{n\tau} = 0 \\ \sigma_{nn} = -i\omega\rho_*\varphi \\ -i\omega u_n = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}} \end{cases} \quad (4)$$

ρ_* — плотность жидкости, n , τ — соответственно вектор внешней нормали и касательный вектор к нижней поверхности слоя.

Задача II (упругий волновод, плоская задача). Для упругого слоя выполняются уравнения Ляме:

$$(1 - 2\nu)^{-1}u_{j,j_i} + \Delta u_i + \kappa_2^2 u_i = 0 \quad (5)$$

Краевые условия имеют следующий вид:

При $x_2 = 1$:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=1} = q_1(x_1) \\ \sigma_{22}|_{x_2=1} = q_2(x_1) \end{cases} \quad (6)$$

при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$:

$$\sigma_{n\tau} = \sigma_{nn} = 0 \quad (7)$$

Задача II может быть получена из задачи I, если в ней устремить плотность жидкости ρ_* к нулю.

Задача III (упругий волновод, антиплоская задача). Для упругого слоя выполняются уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \kappa_2^2 u = 0 \quad (8)$$

$$u = u_3$$

Краевые условия имеют вид:

$$\sigma_{23}|_{x_2=1} = Gu_{,2}|_{x_2=1} = q(x_1) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q(x_1) &= q_3(x_1) \\ G \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{x_2=\varepsilon f(x_1)} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Замыкают постановки всех трех задач условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения.

Во второй главе предлагаются три метода решения прямой задачи о колебаниях слоистой среды с неровной границей раздела.

Первый из них основан на идеях теории потенциала и позволяет свести исходную задачу к системе интегральных уравнений по неровному участку поверхности раздела.

В параграфе 2.1 построены фундаментальные решения для системы слой-жидкость в задаче **I** и для упругого слоя в случае плоской и антиплоской деформаций.

Затем в параграфе 2.2 исходные задачи сведены к системе граничных интегральных уравнений при помощи стандартной процедуры, основанной на теореме взаимности и использующей фундаментальные решения уравнений Ляме и Гельмгольца. Кроме того, получены соотношения, аналогичные формулам Сомильяны и позволяющие по перемещениям и потенциалу скоростей на неровном участке нижней поверхности найти перемещения в любой точке среды.

В задаче **I** аналог формул Сомильяны для системы слой-жидкость имеет вид:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) = & u_m^0(\xi) + \int_{\Gamma_f} \left\{ \sigma_{nn}(x) \left[U_n^{(m)}(x, \xi) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial \bar{n}} \right] - \right. \\ & \left. - u_n(x) \left[\sigma_{nn}^{(m)}(x, \xi) + i\omega \rho_* \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] - u_\tau(x) \sigma_{n\tau}^{(m)}(x, \xi) \right\} dl_x, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a, b], x_2 = \varepsilon f(x_1)\}$$

Через $U_i^{(m)}(x, \xi)$ обозначается компонента фундаментального решения или перемещения в точке x , возникающего под действием сосредоточенной силы единичной интенсивности, приложенной в направлении оси x_m в точке ξ , находящейся в упругом слое, $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ — сингулярное решение, соответствующее $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $\Phi^{(m)}(x, \xi)$ — потенциал скоростей в жидкости, возникающий под действием сосредоточенной силы в упругом слое. $u_k^0(\xi)$ — эталонное поле смещений, возникающее в системе слой-жидкость с равными границами от действия нагрузки $q_j(x_1)$.

Функции $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $\Phi^{(m)}(x, \xi)$, $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ в (11) представлены в виде контурных интегралов, причем контур интегрирования в соответствии с принципом предельного поглощения всюду совпадает с вещественной осью за исключением окрестностей особенностей подынтегральных выражений, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость.

Полученная формула позволяет найти перемещение в любой точке ξ , если $\xi_2 > \varepsilon \max f(x_1)$.

Система граничных интегральных уравнений получена в виде:

$$\begin{aligned} c_{mi}(y)u_i(y) = & u_m^0(y) - \text{v.p.} \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^{(m)}(x, y) + \\ & + u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, y)]dl_x + \rho_* \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^{(m)}(x_1, 0; y) - \\ & - \chi(x_1)\Phi^{(m)}(x_1, 0; y)]dx_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} c(y)\varphi(y) = & -\text{v.p.} \int_{\Gamma_f} \left[i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x, y) + \varphi(x)\frac{\partial\Phi^0}{\partial\bar{n}}(x, y) \right] dl_x - \\ & - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y)]dx_1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}\psi(y) = - \int_{\Gamma_f} \left[i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x; y_1, 0) + \varphi(x)\frac{\partial\Phi^0}{\partial\bar{n}}(x; y_1, 0) \right] dl_x - \quad (14)$$

$$- \text{v.p.} \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y_1, 0) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1$$

$$-\frac{1}{2}\psi(y_1, 0) = Q(y_1) - \frac{1}{\rho_*} \int_{\Gamma_f} \left[i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^-(x; y_1, 0) + \right. \quad (15)$$

$$\left. + u_k(x)\sigma_{kl}^-(x; y_1, 0) \right] dl_x - \text{v.p.} \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^-(x_1, 0; y_1, 0) -$$

$$- \chi(x_1)\Phi^-(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1$$

$y \in \Gamma_f$

$c_{ij}(y) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$, $c(y) = \frac{1}{2}$, если y регулярная точка кривой Γ_f . $U_i^-(x, \xi)$, $\Phi^-(x, \xi)$ — соответственно поле перемещений и потенциал скоростей, возникающие в системе слой-жидкость под действием сосредоточенного источника возмущений единичной интенсивности, находящегося в жидкости, $\sigma_{ij}^-(x, \xi)$ — сингулярные решения, соответствующие $U_i^-(x, \xi)$.

$$\psi(x_1) = \varphi(x)|_{x \in [a, b]},$$

$$\chi(x_1) = \varphi_{,2}(x)|_{x \in [a, b]},$$

$$Q(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} q_j(x_1)U_j^-(x_1, 1; y_1, 0) dx_1$$

Таким образом, получена система из пяти уравнений (12)-(15) с пятью неизвестными функциями: u_k и φ на Γ_f — неровном участке нижней поверхности, а также $\psi(x_1)$ и $\chi(x_1)$ соответственно потенциал скоростей и его производная по x_2 на отрезке $[a, b]$.

Задача II

Аналог формул Сомильяны для упругого слоя в случае плоской дефор-

мации выглядит следующим образом:

$$u_m(\xi) = u_m^0(\xi) - \int_{\Gamma_f} u_i(x) \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j dl_x \quad (16)$$

Система граничных уравнений приобретает вид:

$$c_{mi}(y) u_m(y) = u_m^0(y) - \text{v.p.} \int_{\Gamma_f} u_i(x) \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j dl_x, \quad y \in \Gamma_f \quad (17)$$

Задача III.

Аналог формул Сомильяны для упругого слоя в случае антиплоской деформации выглядит следующим образом:

$$u(\xi) = u^0(\xi) - \int_{\Gamma_f} u(x) \frac{\partial U^0}{\partial n}(x, \xi) dl_x \quad (18)$$

Система граничных уравнений имеет вид:

$$c(y) u(y) = u^0(y) - \text{v.p.} \int_{\Gamma_f} u(x) \frac{\partial U^0}{\partial n}(x, y) dl_x \quad (19)$$

Затем, в параграфе 2.3 все три задачи исследуются методом возмущений и выражения для волновых полей в слое построены в следующем виде:

для задачи **I**

$$u_m(\xi) = u_m^0(\xi) - \varepsilon \int_a^b \left\{ [f(x_1) \sigma_{12,2}^0 + f'(x_1) (\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)] U_1^{(m)}(x, \xi) + \right. \\ \left. + f(x_1) [\sigma_{22,2}^0 + i\omega \rho_* \varphi_{,2}^0] U_2^{(m)}(x, \xi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{i\omega} [f(x_1) (\varphi_{,22}^0 + i\omega u_{2,2}^0) - f'(x_1) (\varphi_{,1}^0 + i\omega u_1^0)] \sigma_{22}^{(m)}(x, \xi) \right\} dx_1 \quad (20)$$

для задачи **II**.

$$u_m(\xi) = u_m^0(\xi) - \varepsilon \int_a^b \left\{ [f(x_1) \sigma_{12,2}^0 - f'(x_1) \sigma_{11}^0] U_1^{(m)}(x, \xi) + \right. \\ \left. + f(x_1) \sigma_{22,2}^0 U_2^{(m)}(x, \xi) \right\} dx_1 \quad (21)$$

для задачи **III**.

$$u(\xi) = u^0(\xi) - \int_a^b [f(x_1)u_{,22}^0(x_1, 0) - f'(x_1)u_{,1}^0(x_1, 0)]U^0(x_1, 0; \xi)dx_1 \quad (22)$$

Затем, в параграфе 2.4 строятся формулы, аналогичные формулам приближения Борна, или приближения однократного рассеяния. Они имеют вид:

для задачи **I**.

$$u_m(\xi) = u_m^0(\xi) + \int_{\Gamma_f} \left\{ \sigma_{nn}^0(x) \left[U_n^{(m)}(x, \xi) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial \bar{n}} \right] - u_n^0(x) \left[\sigma_{nn}^{(m)}(x, \xi) + i\omega \rho_* \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] - u_\tau^0(x) \sigma_{n\tau}^{(m)}(x, \xi) \right\} dl_x, \quad (23)$$

$$\xi_2 > \varepsilon \max f(x_1).$$

для задачи **II**.

$$u_m(\xi) = u_m^0(\xi) - \int_{\Gamma_f} u_i^0(x) \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j dl_x \quad (24)$$

для задачи **III**.

$$u(\xi) = u^0(\xi) - \int_{\Gamma_f} u^0(x) \frac{\partial U^0}{\partial n}(x, \xi) dl_x \quad (25)$$

В третьей главе проведено численное исследование полученных граничных интегральных уравнений (12)-(15), (17), (19) и полей перемещений на верхней границе слоя для всех трех задач. Изложены основные идеи метода граничных элементов, затем осуществлена дискретизация интегральных уравнений. В результате получены СЛАУ для определения значений неизвестных функций на неровном участке. Матрицы систем представляют собой матрицы с диагональным преобладанием, являются хорошо обусловленными и их решения устойчивы к малым вычислительным погрешностям элементов систем.

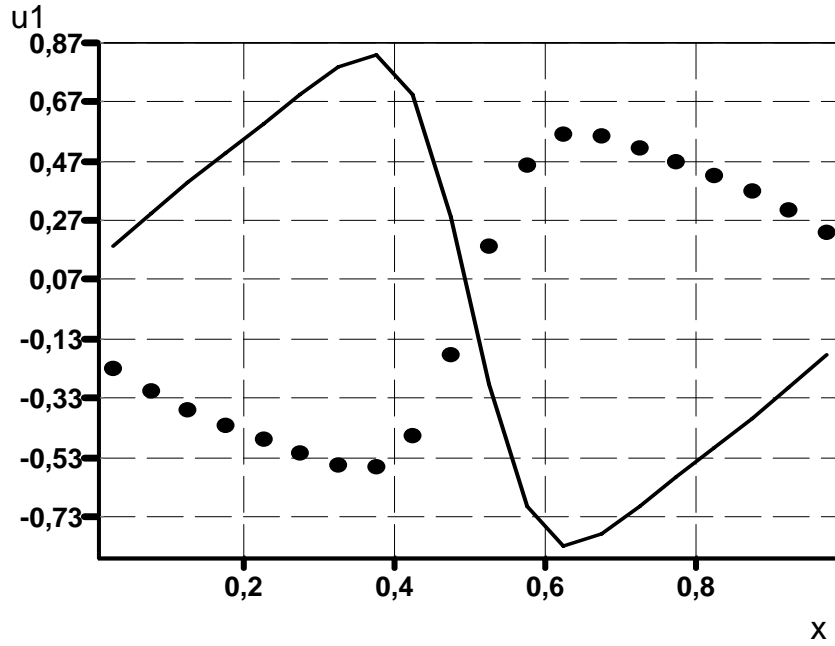


Рис. 1: Горизонтальное перемещение на неровном участке границы раздела при $\kappa_2 = 5$, $\varepsilon = 0.2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$. Сплошной линией показана вещественная часть горизонтального перемещения, точками — его мнимая часть.

На рисунке 1 показан результат численного решения системы интегральных уравнений (11)-(15) при $\kappa_2 = 5$, $\varepsilon = 0.2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$. Сплошной линией показана вещественная часть горизонтального перемещения, точками — его мнимая часть, количество элементов $N = 20$.

Также приводятся результаты расчета волновых полей на поверхности слоя, полученные тремя методами (метод граничного элемента, метод возмущений, приближение Борна). Производится сравнительный анализ результатов расчетов полей, произведенных тремя разными способами.

Обозначим через $g_i^I = u_i - u_i^0$ — разность между полем перемещений на поверхности, найденным с использованием метода граничного элемента по формуле (16) и эталонным полем перемещений для ровного слоя $u_i^0 = u_i^{et}$.

$g_i^{II} = u_i^1$ — решение в первом приближении, найденное методом возмущений по формуле (21).

Введем в рассмотрение величину

$$\delta_i = \frac{\|g_i^I - g_i^{II}\|}{\|g_i^I\|} 100\%$$

и исследуем ее поведение в зависимости от амплитуды неровности. На рисунке 2 темным цветом показана область значений параметров κ_2 , ε , в которой величина δ_1 не превышает одного процента. В расчетах принято, что неровность имеет форму дуги синусоиды $f(x_1) = \varepsilon \sin(\pi x_1)$, $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$, материал слоя — сталь, толщина слоя $H = 1$ м., нагрузка принята сосредоточенной вида: $\frac{q(x_1)}{G} = \delta(x_1 - 0,5)$.

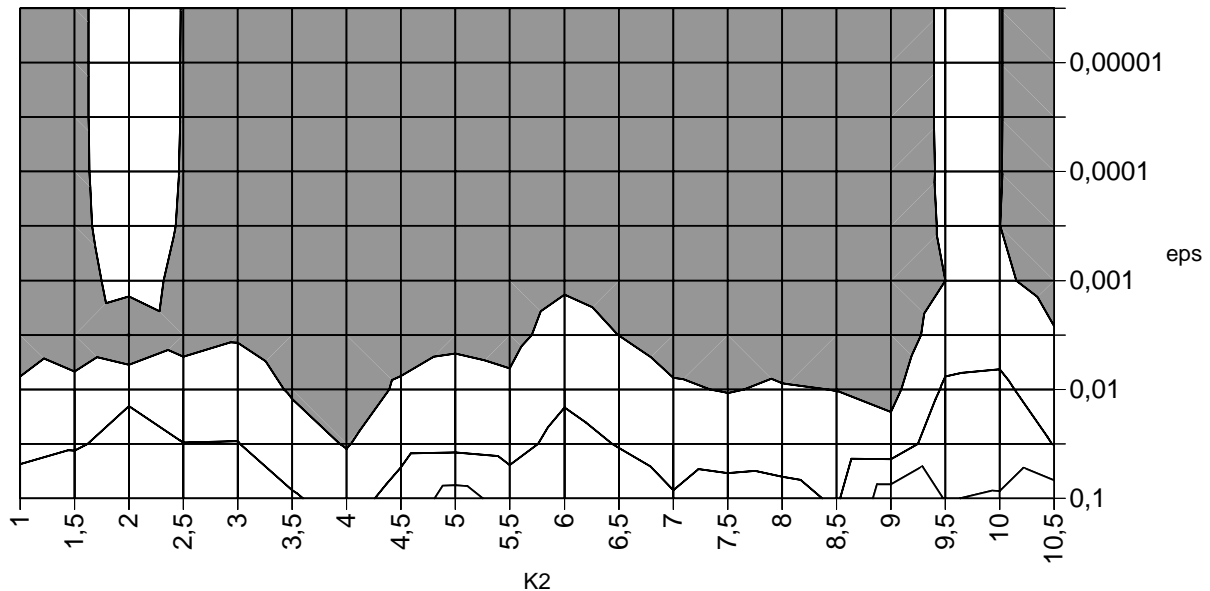


Рис. 2:

В четвертой главе рассматривается обратная задача: по информации о поле перемещений на конечном участке верхней границы $[c, d]$ найти форму неровного участка нижней границы. Соотношения (20), (21) и (21) при заданной нагрузке представляют из себя интегральные уравнения относительно формы неровности $f(x_1)$. Кроме самой функции f в уравнения входит ее производная, однако ее можно исключить путем интегрирования по частям, и соотношения (20), (21) и (21) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с гладким ядром.

Кроме того, следует отметить, что интегральные уравнения для опреде-

ления формы неровного участка нижней границы также могут быть получены из линеаризации соотношений (11), (16), (18) в предположении малости амплитуды неровности. Полученные уравнения также представляют из себя интегральные уравнения Фредгольма первого рода, похожие по форме на уравнения, полученные методом линеаризации. Доказано, что уравнения, полученные двумя разными способами, совпадают друг с другом.

Задача I.

Уравнение для определения формы неровного участка нижней поверхности имеет вид:

$$\int_a^b K_I^m(x_1, \xi_1) f(x_1) dx_1 = g_m(\xi_1) = u_m(\xi_1, 1) - u_m^0(\xi_1, 1) \quad (26)$$

Ядро K_I^m сокращенно записывается в виде:

$$K_I^m(x_1, \xi_1) = - \left\{ G\kappa_2^2 \left[u_1^0 U_1^{(m)} + u_2^0 U_2^{(m)} \right] + 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left[U_{2,2}^{(m)} u_{2,2}^0 - u_{1,1}^0 U_{1,1}^{(m)} \right] - \rho_* \left[\kappa_0^2 \varphi^0 \Phi^{(m)} + \varphi_{,1}^0 \Phi_{,1}^{(m)} - \varphi_{,2}^0 \Phi_{,2}^{(m)} \right] - i\omega\rho_* \left[u_{1,1}^0 \Phi^{(m)} + u_{1,1}^{(m)} \varphi^0 \right]_{,1} \right\} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ \xi_2=1}}$$

Задача II.

Уравнение для определения формы неровного участка нижней поверхности имеет вид:

$$\int_a^b K_{II}^m(x_1, \xi_1) f(x_1) dx_1 = g_m(\xi_1) = u_m(\xi_1, 1) - u_m^0(\xi_1, 1) \quad (27)$$

$$K_{II}^m(x_1, \xi_1) = -G \left[\kappa_2^2 \left(u_1^0 U_1^{(m)} + u_2^0 U_2^{(m)} \right) + 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(U_{2,2}^{(m)} u_{2,2}^0 - u_{1,1}^0 U_{1,1}^{(m)} \right) \right] \Big|_{\substack{x_2=0 \\ \xi_2=1}}$$

Задача III.

$$\int_a^b K_{III}(x_1, \xi_1) f(x_1) dx_1 = g(\xi_1) = u(\xi_1, 1) - u^0(\xi_1, 1) \quad (28)$$

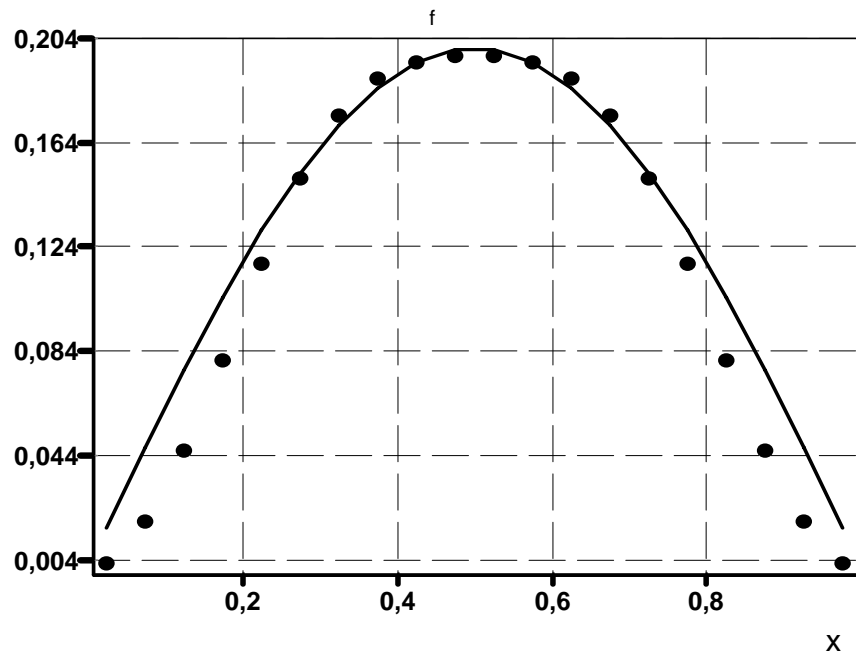


Рис. 3: Численного эксперимента по восстановлению формы неровности на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ по информации о величине $Re(u_1)$ на отрезке $[c, d] = [0, 1]$ $\varepsilon = 0, 2$, $f(x_1) = \sin\pi x_1$, $\kappa_2 = 1$.

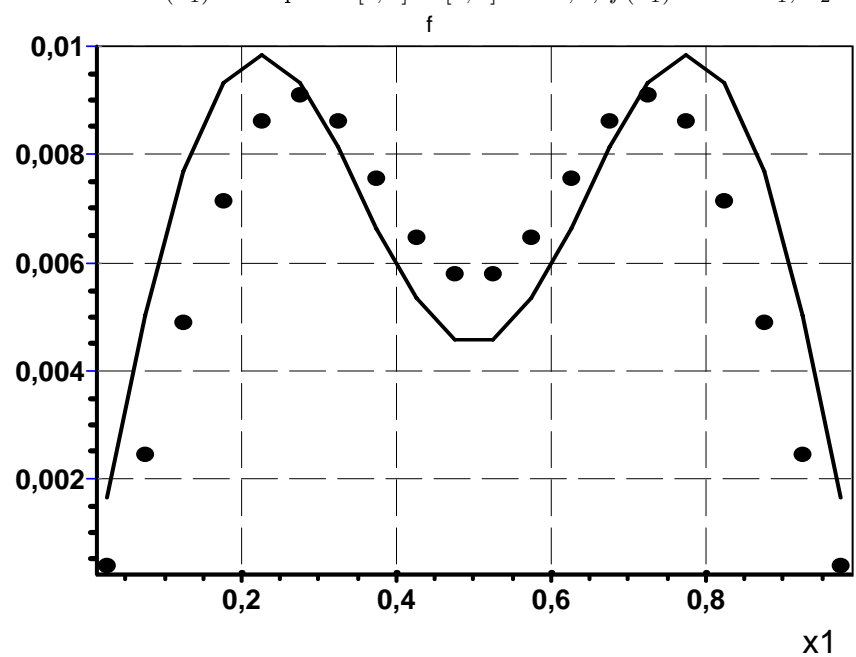


Рис. 4: Результат численного эксперимента по восстановлению формы неровности на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ по информации о величине $Re(u_1)$ на отрезке $[c, d] = [0, 1]$ при $\kappa_2 = 5$, $\varepsilon = 0, 1$, $f(x_1) = 0, 93(\sin\pi x_1 + \sin 3\pi x_1)$. Сплошной линией изображена точная форма неровности, точками - восстановленная. (Задача II.)

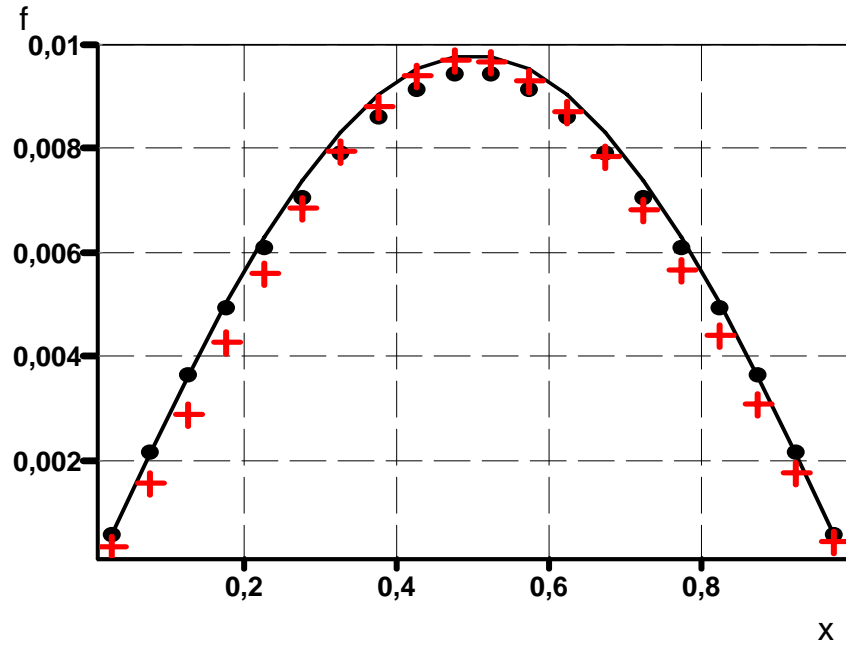


Рис. 5: Результат численного эксперимента по восстановлению формы неровности на отрезке $[a, b] = [0, 1]$ по информации о величине $Re(u_1)$ на отрезках $[c, d] = [0, 1]$ (точки) и $[c, d] = [2, 4]$ (кресты) при $\kappa_2 = 2$, $\varepsilon = 0,01$, $f(x_1) = \sin \pi x_1$. Сплошной линией изображена точная форма неровности.

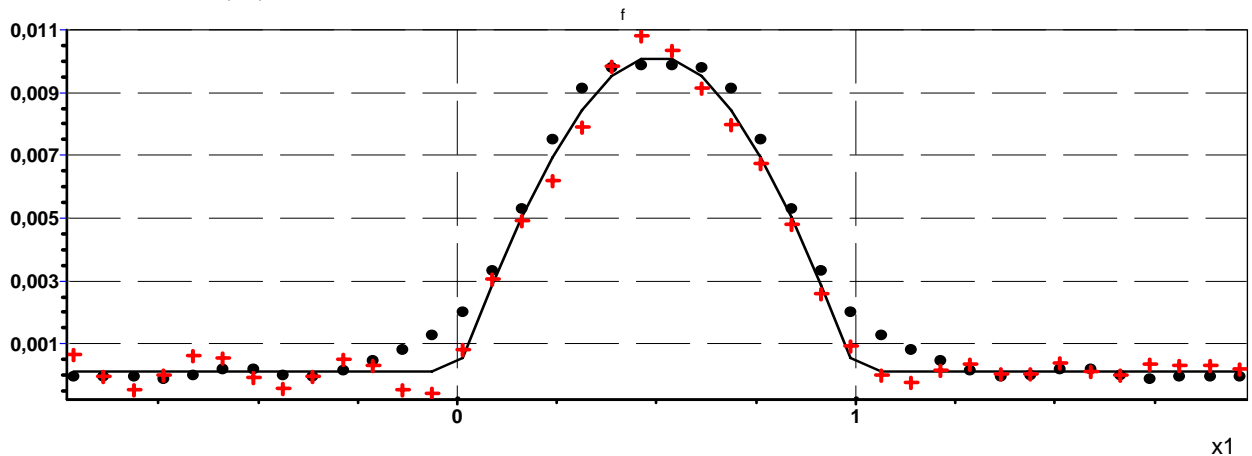


Рис. 6: Результат численного эксперимента по восстановлению формы неровности на отрезке $[a, b] = [-1, 2]$ по информации о величине $Re(u_1)$ на отрезке $[c, d]$ при $\kappa_2 = 5$, $\varepsilon = 0.01$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$ при $x_2 \in [0, 1]$, $f(x_1) = 0$ при $x_2 \in [-1, 0] \cup [1, 2]$, $[a, b] = [-1, 2]$ (задача **II**). Сплошной линией изображена точная форма неровности, точками - восстановленная при $[c, d] = [-1, 2]$, крестами при $[c, d] = [0, 3]$.

$$K_{III}(x_1, \xi_1) = -G \left[\kappa_2^2 u^0 U^0 - u_{,1}^0 U_{,1}^0 \right] \Big|_{\substack{x_2=0 \\ \xi_2=1}}$$

На рисунке 3 показан результат расчета при амплитуде неровности $\varepsilon = 0, 2$, $f(x_1) = \sin \pi x_1$, отрезок $[a, b]$ совпадает с $[c, d]$ и равен $[0, 1]$ (задача **III**).

На рисунке 4 представлен результат расчета для более сложной формы неровности слоя в случае плоских колебаний (задача II) при $\kappa_2 = 5$, $f(x_1) = 0,93(\sin\pi x_1 + \sin 3\pi x_1)$, $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$, $\varepsilon = 0,01$, параметр регуляризации подобран автоматически и равен $\alpha = 1,0143 * 10^{-9}$ обобщенная невязка $\rho = 1,614 * 10^{-11}$.

На рисунке 5 показан результат расчета при $\kappa_2 = 2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$ для слоя, покоящегося на жидкости (задача I), точками показан результат расчета, произведенного по данным о вещественной части вертикального перемещения на отрезке $[c, d] = [0, 1]$, крестами — результат, полученный при $[c, d] = [2, 4]$. Параметр регуляризации в обоих случаях подобран автоматически.

Условие, согласно которому считается известным местоположение неровного участка, может являться серьезным препятствием при решении реальных задач. В следующем расчете (рис. 6) смоделирована ситуация, в которой местоположение неровного участка известно лишь приближенно.

Основные результаты

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. На основе фундаментального решения для упругого слоя, контактирующего с жидкостью, разработаны методы сведения краевых задач, описывающих установившиеся колебания волноводов с нерегулярными границами, к системам граничных интегральных уравнений.
2. Развита методы численного решения для систем граничных интегральных уравнений на основе метода граничного элемента.
3. Предложены приближенные методы расчета волновых полей для волноводов с нерегулярными границами. Проведено сравнение трех методов расчета волновых полей (метод граничных интегральных уравнений, метод возмущений, приближение Борна) и установлены границы их применимости.

4. Построены и решены интегральные уравнения для решения обратных геометрических задач об определении формы неровного участка границы слоя для неровностей с малой амплитудой.

Публикации автора по теме диссертации.

1. *Ватульян А.О., Углич П.С.* Обратная геометрическая задача для неровного упругого слоя, контактирующего с жидкой средой // Межвузовский сборник научных трудов "Интегро-дифференциальные операторы и их приложения".- г. Ростов-на-Дону, Изд. ДГТУ.- вып. 5, 2001 г.- С. 50-55
2. *Ватульян А.О., Углич П.С.* Определение формы неровной границы раздела между упругой и жидкой средами // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский Регион.- 2001.- Спецвыпуск Математическое моделирование.- С. 44-46.
3. *Ватульян А.О., Углич П.С.* Формулировка граничных интегральных уравнений для упруго-жидких волноводов с неровной границей. Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VII международной конференции памяти академика РАН И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, 22-24 октября 2001 г. с. 63-56.
4. *Ватульян А.О., Углич П.С.* О колебаниях упругой полосы с неровной нижней границей. // Акустический журнал.- 2006.- Т. 46, №6.- С. 777-783.
5. *Углич П.С.* О численной реализации метода граничного элемента для упруго-жидкого волновода // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием.- г.Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003.- С. 369-371.
6. *Углич П.С.* Об антиплоских колебаниях слоя с неровной нижней границей. Математическое моделирование, вычислительная механика и гео-

физика // Труды III-й школы-семинара.- Ростов-на-Дону, 15-19 ноября 2004.- с. 137-139.

7. *Углич П.С.* Обратная геометрическая задача для упругого слоя с неровной нижней границей. Современные проблемы механики сплошной среды // Труды IX международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича.- г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Т. 2.- с. 223-227.