

На правах рукописи

Колесников Алексей Михайлович

**БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ
ОБОЛОЧЕК**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону

2006

Работа выполнена на кафедре теории упругости Ростовского государственного университета.

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор **Зубов Леонид Михайлович**

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
доцент **Еремеев Виктор Анатольевич**

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Сафроненко Владимир Георгиевич

Ведущая организация **Институт проблем машиноведения РАН**

Защита диссертации состоится «26» декабря 2006 г. в 15⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д212.208.06 по физико-математическим наукам при Ростовском государственном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, РГУ, механико-математический факультет, ауд. 211 .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ростовского государственного университета по адресу: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан « 23 » ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Боев Н. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Нелинейная теория упругих оболочек – относительно новый и важный раздел механики деформируемого твердого тела. Оболочки встречаются как природные объекты: бамбук, скорлупа яиц, улитка, клеточная мембрана, артерия живого организма и т. д. Гибкие тонкостенные конструкции широко распространены в технической деятельности человека: разнообразные надувные сооружения, гибкие емкости, пневмоопалубка, мембранные плотины, горные пневмоконструкции, гибкие трубопроводы. Применение нетрадиционных резиноподобных материалов в технике, изучение биологических структур требует учета и исследования больших деформаций тонкостенных конструкций, что невозможно вне рамок нелинейной теории. Увеличение в XXI веке количества работ, рассматривающих большие деформации тонкостенных конструкций, свидетельствует об актуальности данной темы.

Цель работы состоит в исследовании новых задач нелинейного деформирования тонких упругих оболочек.

Метод исследования задач, представленных в диссертационной работе, основан на сведении двумерной задачи статики оболочки к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрешающая система уравнений сформулирована относительно функций кратностей удлинений и одной функции координат. Краевая задача интегрируется численно методом пристрелки, с помощью метода Рунге-Кутты.

Достоверность результатов обеспечивается сравнением теоретических выводов с экспериментальным исследованием, использованием точных нелинейных уравнений равновесия оболочек, использованием устойчивых численных методов с высокой точностью

приближения, сравнением результатов исследования с известными решениями и результатами, представленными в работах других авторов.

На защиту выносятся результаты, сформулированные ниже в разделе **научная новизна**.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующих результатах, полученных автором:

разработан общий подход к решению определенного класса задач нелинейной теории оболочек, состоящий в сведении двумерной краевой задачи к одномерной;

решен ряд задач о деформации оболочек вращения. Получено решение о раздувании торообразной оболочки, изготовленной из различных высокоэластичных материалов. В задаче о растяжении и раздувании цилиндрической оболочки проведено сравнение решений, учитывающих и не учитывающих условия закрепления по краю;

в нелинейной постановке рассмотрена задача об изгибе цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением. Решена задача о деформации круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из неогуковского материала. Произведены численные расчеты напряженно-деформированного состояния оболочки. Найдено семейство независимых безразмерных параметров, для которых доказано подобие характеристик напряженно-деформированного состояния;

для круговой цилиндрической оболочки из неогуковского материала выведены приближенные зависимости изгибающего момента от давления и кривизны оси оболочки, а также максимального изгибающего момента от давления;

выполнено экспериментальное исследование тороидальной оболочки и проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

Практическая ценность диссертационной работы состоит в разработке единого подхода к решению некоторых классов задач статики оболочек; определении нелинейных характеристик сопротивления изгибу цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением; в обоснованных приближенных формулах расчета зависимости изгибающего момента от кривизны оси изогнутой цилиндрической оболочки и величины внутреннего давления.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- III Всероссийской конференции по теории упругости (Ростов-на-Дону – Азов, 2003),
- международной школе семинаре “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Абрау-Дюрсо, 2005),
- 8th Conference “Shell Structures: Theory and applications” (Gdańsk–Jurata (Poland), 2005),
- 16-ом симпозиуме “Проблемы шин и резинокордных композитов” (Москва, 2005),
- семинарах кафедры теории упругости РГУ.

Публикации. Основное содержание и результаты диссертации опубликованы в 6 статьях: [1, 2, 3, 4, 5, 6], список которых приведен в конце автореферата. Статьи [1, 6] написаны в соавторстве с научным руководителем Л. М. Зубовым, которому принадлежат постановки задач и рекомендации по выбору метода решения. Вывод разрешающих систем уравнений, разработка и реализация численного метода, численные результаты принадлежат автору диссертационной работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертационной работы составляет 115 страниц, включает в себя 35

рисунков и 21 таблицу, список литературы, содержащий 95 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении сделан обзор публикаций по рассматриваемой теме и дано краткое описание содержания всех глав диссертации.

Значительный вклад в развитие нелинейной теории оболочек внесли И. И. Ворович, К. З. Галимов, П. А. Жилин, Л. М. Зубов, П. Е. Товстик, К. Ф. Черных, Л. И. Шкутин, J. E. Adkins, S. S. Antman, A. E. Green, W. T. Koiter, A. Libai, W. Pietraszkiewicz, J. G. Simmonds и другие. Большая часть публикаций, посвященных решению конкретных задач деформирования нелинейно упругих оболочек, рассматривает оболочки вращения. В ряде работ рассмотрены другие задачи о деформации оболочек, например, задача о раздувании прямоугольной мембраны.

Изгиб тонкостенной цилиндрической оболочки и влияние внутреннего давления на деформацию в постановке нелинейной теории упругости практически не исследованы. В ряде работ Бразье, Рейсснера и других авторов изучение изгиба тонкостенных конструкций и влияния на него давления проведено в рамках гипотез малых деформаций. Впервые задача об изгибе цилиндрической оболочки в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена Л. М. Зубовым.

В первой главе формулируются основные соотношения нелинейной теории оболочек при больших деформациях.

В п. 1.1 модель оболочки строится на её представлении двумерным материальным континуумом – материальной поверхностью. Поверхности оболочек o в отсчетной и O в текущей конфигурациях описываются радиус-векторами $\mathbf{r}(q^1, q^2)$ и $\mathbf{R}(q^1, q^2)$, соответственно, где q^α ($\alpha=1,2$) – гауссовы координаты. Материальные свойства поверхности определяются заданием функции удельной (на единицу площади поверхности) потенциальной энергии деформации оболочки \mathcal{W} , как функции меры деформации Коши материальной поверхности \mathbf{G}^\times :

$$W = W(\mathbf{G}^\times), \quad (1)$$

$$\mathbf{G}^\times = G_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad G_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta.$$

Здесь \mathbf{r}^α – взаимный базис в отсчетной конфигурации, \mathbf{R}_β – основной базис в текущей конфигурации.

Уравнения равновесия безмоментной упругой оболочки выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta\Pi = 0, \quad \Pi = \iint_o W(\mathbf{G}^\times) do - \mathcal{E}. \quad (2)$$

Здесь \mathcal{E} – потенциал внешних сил, δ – символ вариации. В дальнейшем предполагается, что допустимые функции на всей границе оболочки удовлетворяют кинематическим краевым условиям (\mathbf{R}_0 – заданная функция)

$$\mathbf{R}|_{\partial o} = \mathbf{R}_0, \quad (3)$$

а вариация потенциала внешних сил имеет вид

$$\delta\mathcal{E} = \iint_o \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \nabla_0 \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{R} do. \quad (4)$$

Варьирование функционала Π приводит к уравнениям равновесия в геометрии недеформированной конфигурации оболочки

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}^\times} \cdot \nabla_0 \mathbf{R}, \quad \nabla_0 = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}.$$

Здесь ∇_0 – двумерный оператор градиента (набла-оператор) на поверхности o , \mathbf{D} – тензор напряжения типа Пиолы.

В геометрии деформированной конфигурации оболочки уравнения равновесия записываются так

$$\nabla \cdot \mathbf{L} + \mathbf{q} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{L} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{G}}} (\nabla_0 \mathbf{R})^\top \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{q} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{G}}} \tilde{\mathbf{q}}, \quad \nabla = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

$$\mathbf{G} = G_{11} G_{22} - G_{12}^2, \quad \mathbf{g} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2.$$

Здесь ∇ – набла-оператор на поверхности O , \mathbf{L} – тензор усилий типа Коши, $g_{\alpha\beta}$ – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности o , $G_{\alpha\beta}$ – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности O .

Функция удельной энергии оболочки W из несжимаемого материала выражается через функцию удельной энергии трехмерной среды W^* по формуле

$$W(\mathbf{G}^\times) = hW^*(\mathbf{G}^\times + (\mathbf{g}/G)\mathbf{nn}). \quad (7)$$

Здесь h – толщина оболочки в отсчетной конфигурации, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности o .

В п. 1.2 дается формулировка определяющих соотношений для безмоментных оболочек с помощью функции трехмерной потенциальной энергии деформации. Приведены примеры уравнений состояния оболочки для различных моделей высокоэластичных материалов.

В п. 1.3 рассматривается частный случай деформации оболочки, когда поверхности o и O такие, что компоненты метрических тензоров в отсчетной и текущих конфигурациях не зависят от координаты q^2 и образуют диагональную матрицу. Толщина оболочки также не зависит от координаты q^2 :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial q^2} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad G_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$h = h(q^1). \quad (8)$$

Уравнения равновесия оболочки (6) примут вид

$$\frac{\partial L^{11}}{\partial q^1} + L^{11}(2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + L^{22}\Gamma_{22}^1 + \xi^1 = 0,$$

$$\xi^2 = 0, \quad (9)$$

$$L^{11}B_{11} + L^{12}B_{21} + L^{21}B_{12} + L^{22}B_{22} + \xi = 0,$$

$$\mathbf{q} = \xi^\beta \mathbf{R}_\beta + \xi \mathbf{N}.$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ – символ Кристоффеля второго рода, $B_{\alpha\beta}$ – компоненты второго фундаментального тензора \mathbf{B} поверхности O , \mathbf{q} – интенсивность внешних сил, \mathbf{N} – единичная нормаль к поверхности O .

Предположения (8) приводят к ограничению на внешние нагрузки в виде отсутствия компонент направленных вдоль координатой линии $q^2 = \text{const}$. Кроме того, в случае, когда компоненты тензора кривизны $B_{\alpha\beta}$ и компоненты вектора интенсивности внешних сил ξ^1 и ξ не зависят от координаты q^2 , система уравнений (1.3.12) будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот случай реализуется, например, в задаче об осесимметричной деформации оболочки вращения.

В п. 1.4 описан численный метод решения краевой задачи. В качестве метода решения краевой задачи используется метод пристрелки, основой которого является сведение краевой задачи к решению ряда задач Коши.

Во второй главе рассматривается задача об осесимметричной деформации оболочек вращения.

В п. 2.1 показано, что для такого вида деформации осесимметричной оболочки справедливы предположения (8), а компоненты второго фундаментального тензора деформированной поверхности зависят только от одной гауссовой координаты. Поэтому уравнения равновесия оболочки вращения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваются цилиндрические координаты r, φ, z такие, что ось z совпадает с осью симметрии оболочки, а гауссова координата q^2 совпадает с угловой координатой φ . За гауссову координату q^1 принимается некоторый параметр, отсчитываемый вдоль меридиана оболочки.

В выбранной системе координат положение точки поверхности оболочки вращения до деформации представляется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1) = r(q^1)\mathbf{e}_r + z(q^1)\mathbf{e}_z. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z – орты цилиндрической системы координат.

Срединная поверхность после деформации будет задаваться с помощью неизвестных функций $R(q^1)$ и $Z(q^1)$ уравнениями

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1) = R(q^1)\mathbf{e}_r + Z(q^1)\mathbf{e}_z. \quad (11)$$

Разрешающая система уравнений составляется относительно функций кратностей удлинений λ_1 , λ_2 и функции ω , определенных соотношениями

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{R'^2 + Z'^2}{r'^2 + z'^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{R}{r}, \quad \omega(q^1) = \frac{Z'}{R'} \quad (12)$$

В общем виде система примет вид

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4 + \frac{\xi^1}{h} F_5 &= 0, \\ E_1 \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2 \omega + \frac{\xi}{h} E_3 &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} = s \frac{g_{11}}{g_{22}} \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{1 + \omega^2}} - \frac{\lambda_2}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \quad s = \text{sgn}(R'(q^1)).$$

В случае задания потенциальной энергии как функции кратностей удлинений коэффициенты F_k и E_l примут вид

$$\begin{aligned} F_1^\lambda &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1^2}, \quad F_2^\lambda = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{2}{\lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2}, \\ F_3^\lambda &= -\frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \right) \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \quad F_4^\lambda = \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1}, \\ F_5^\lambda &= g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2, \quad E_1^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} g_{22} + \lambda_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right)^2, \\ E_2^\lambda &= \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} g_{22} + \lambda_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right), \quad E_3^\lambda = g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2. \end{aligned} \quad (14)$$

В п. 2.2 рассматривается задача о раздувании замкнутой сферической оболочки. Численное решение задачи сравнивается с аналитическими решениями в рамках теории упругости и теории оболочек. На рисунке 1 сплошной линией обозначены аналитические решения, точками – численное решение. Как видно из графика все три решения полностью совпадают.

В п. 2.3 исследуется задача о деформации круглой плоской мембраны, нагруженной равномерно распределенной нормальной нагрузкой. Численные исследования произведены для материалов неогуковского, Муни и Фына с разными параметрами.

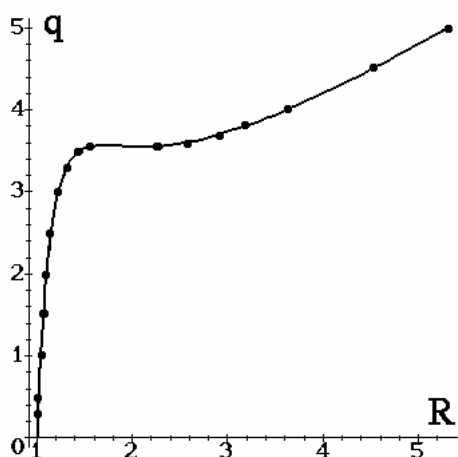


Рис. 1. Зависимость давления от радиуса деформированной сферической оболочки

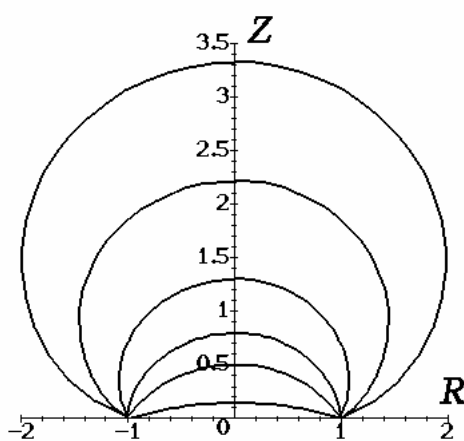


Рис. 2. Сечения деформированной мембраны из материала Муни ($\mu = 2, \beta = 0.5$)

Для неогуковского материала и материала Муни произведено сравнение с результатами теоретических и экспериментальных исследований других авторов. Расхождение результатов для неогуковского материала составляет менее 10%, для материала Муни практически отсутствует. На рисунке 2 представлена форма деформированной оболочки изготовленной из материала Муни для разных величин давления.

В п. 2.4 рассматривается задача о раздувании замкнутой торообразной оболочки. Уравнение поверхности оболочки до деформации представляется с помощью функций r и z , заданных в виде

$$r(\theta) = r_0 + r_1 \sin \theta, \quad z(\theta) = r_1 \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2. \quad (15)$$

Для материалов Муни, Клоснера-Сегала и неогуковского построены зависимости между характеристиками деформации и величиной давления. Исследуется зависимость геометрических размеров тора на деформацию и напряжение в оболочке. Так на деформацию и напряжения оказывает влияние отношение r_0/r_1 : чем оно больше, тем равномернее по координате θ уменьшение толщины оболочки (рис. 5) и распределение напряжений в ней (рис. 3, 4). Номер графиков на рисунках 3–6 соответствует геометрическим характеристикам и материалу из соответствующей номеру строки таблицы 1.

Таблица 1. Значения упругих постоянных и геометрических параметров

1	Неогуковский	$c_1 = 1, r_0 = 2, r_1 = 1$
2	Неогуковский	$c_1 = 1, r_0 = 10, r_1 = 1$
3	Муни	$c_1 = 1, c_2 = 0.5, r_0 = 2, r_1 = 1$
4	Муни	$c_1 = 1, c_2 = 0.5, r_0 = 10, r_1 = 1$
5	Клоснера-Сегала	$\mu = 2, \beta = 1, \kappa = 0.25, r_0 = 2, r_1 = 1$
6	Клоснера-Сегала	$\mu = 2, \beta = 1, \kappa = 0.25, r_0 = 10, r_1 = 1$

Различные типы поведения демонстрирует зависимость давления от минимальной радиальной координаты деформированного тора $R^* = R(-\pi/2)/r(-\pi/2)$ (рис. 6). На характер кривых оказывают влияние тип потенциала, величина упругих постоянных и геометрические параметры оболочки. При малых нагрузках ($p^* < 0.4$) поведение оболочки в основном определяет параметр r_0/r_1 . Влияние свойств материала для этого диапазона нагрузок выражено слабее. Для больших нагрузок на деформацию оболочки существенно влияют также тип потенциала и величина упругих постоянных.

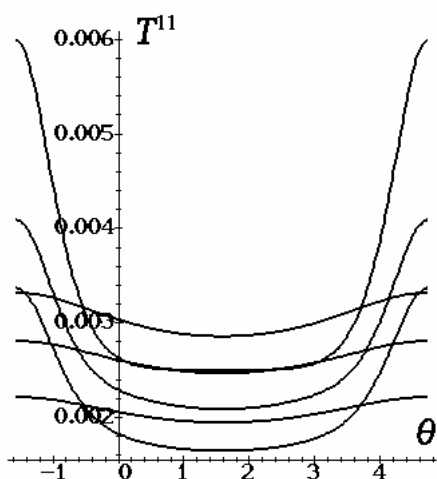


Рис. 3. Напряжения T^{11}

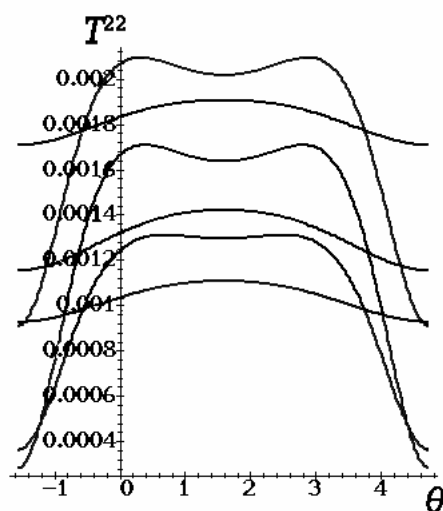


Рис. 4. Напряжения T^{22}

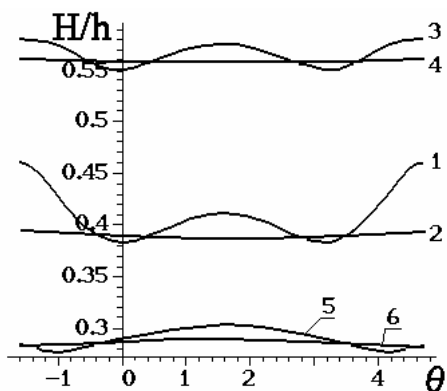


Рис. 5. Толщина деформированной оболочки

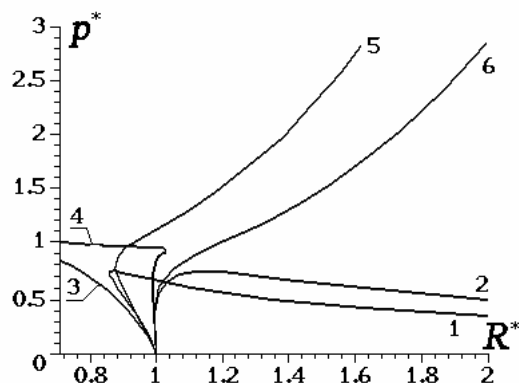


Рис. 6. Зависимость давления от внутреннего радиуса деформированного тора

В п. 2.5 рассматривается задача об осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки. Целью исследования было изучить возможность использования более простой математической задачи для моделирования эксперимента по растяжению и раздуванию круговой цилиндрической оболочки. Для этого рассматриваются две задачи. В первой задаче для растянутой на некоторую величину цилиндрической оболочки из неогуковского материала строится зависимость радиуса сечения от величины внутреннего давления. Полученные данные свидетельствуют, что при больших деформациях, даже вдали от краев оболочки, разница между решениями, учитывающими и не учитывающими условия закрепления, существенна. Учет граничных

условий дает возможность исследовать поведение оболочки на убывающем отрезке зависимости «давление–радиус».

Во второй задаче рассматривается влияние условий закрепления цилиндрической оболочки (растягиваемой вдоль образующей, но не нагруженной внутренним давлением) на деформацию вдали от края. Для безмоментных оболочек, у которых отношение длины к радиусу сечения более четырех, аналитическое решение, не учитывающее условий закрепления, может быть принято с погрешностью менее 10%. На рисунке 7 представлена зависимость между изменением радиуса цилиндра оболочки и коэффициентом растяжения. Линии 2 и 3 совпадают и соответствуют аналитическим решениям задачи о растяжении трубы в постановке теории упругости и теории оболочек без учета условий закрепления.

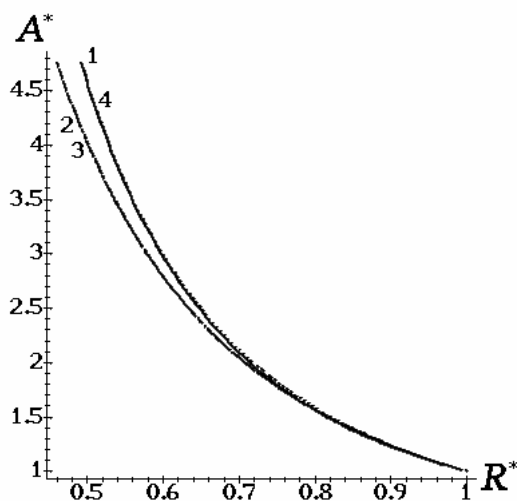


Рис. 7. Зависимость радиуса растянутой оболочки от коэффициента растяжения

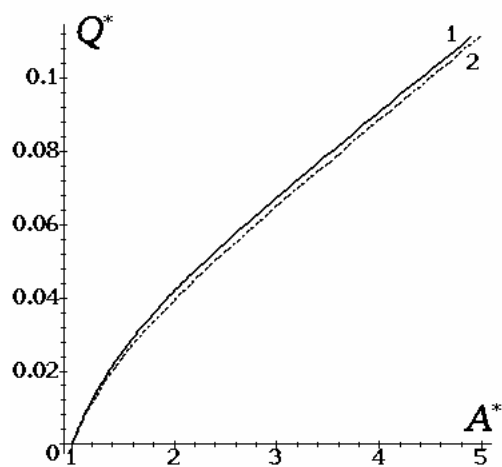


Рис. 8. Зависимость растягивающей нагрузки от удлинения цилиндра

Линии 1 и 4 соответствуют решению задачи с учетом закрепления радиуса оболочки на её краях. Линия 1 соответствует зависимости радиуса от удлинения всего цилиндра. Линия 4 представляет зависимость радиуса деформированной оболочки от кратности

удлинения малого центрального элемента цилиндрической оболочки. На рисунке 8 представлена зависимость растягивающей нагрузки от коэффициента растяжения для аналитического решения по теории оболочек (линия 2) и для решения, учитывающего закрепление по краю (линия 1). Их относительная разность не превышает 8%.

В третьей главе исследуется задача изгиба цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В п. 3.1 рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка, поверхность которой представляется в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 в виде

$$\mathbf{r} = x_1(q^1)\mathbf{i}_1 + x_2(q^1)\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3. \quad (16)$$

Здесь, как и ранее, за q^1 и $q^2 = x_3$ обозначаются гауссовы координаты оболочки.

Толщину недеформированной цилиндрической оболочки считаем постоянной вдоль образующей.

Поверхность оболочки после деформации будет задаваться уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \alpha(q^1)\mathbf{i}_1 + \gamma(q^1)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 &= \cos(\beta x_3)\mathbf{i}_2 + \sin(\beta x_3)\mathbf{i}_3, \quad \beta = const. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы (17) описывают изгиб цилиндрической оболочки, при котором она превращается в сектор тороидальной оболочки.

По аналогии с (12) введем в рассмотрение функции

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\alpha'^2 + \gamma'^2}{x_1'^2 + x_2'^2}}, \quad \lambda_2 = \beta\gamma, \quad \omega = \frac{\alpha'}{\gamma'}. \quad (18)$$

Разрешающая система уравнений выводится относительно функций кратностей удлинений λ_1, λ_2 и функции ω и принимает вид аналогичный (13)

$$\begin{aligned}
F_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + F_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + F_3 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial q^1} F_4 + \frac{\xi^1}{h} F_5 &= 0, \\
E_1 \frac{\partial \omega}{\partial q^1} + E_2 \omega + \frac{\xi}{h} E_3 &= 0, \\
\frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} &= s\beta \sqrt{\frac{\lambda_1^2 g_{11}}{1 + \omega^2}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

В случае задания потенциальной энергии, как функции кратностей удлинений, коэффициенты F_k и E_l примут вид

$$\begin{aligned}
F_1^\lambda &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1^2}, \quad F_2^\lambda = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{2}{\lambda_2} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2}, \\
F_3^\lambda &= -\frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \right) \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \\
F_4^\lambda &= \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1}, \quad F_5^\lambda = g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2, \\
E_1^\lambda &= \frac{\lambda_2'^2}{\beta^2 \sqrt{g_{11}} \lambda_1} \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1}, \\
E_2^\lambda &= \sqrt{g_{11}} \lambda_2' \frac{\partial W^*}{\partial \lambda_2}, \\
E_3^\lambda &= g_{11} \lambda_1^2 \lambda_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Главный вектор \mathbf{F} и главный момент \mathbf{M} сил, действующие в произвольном сечении цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенным давлением и испытывающей деформацию вида (17), определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(x_3) &= F^3 \mathbf{e}_3 + p S_\Sigma \mathbf{e}_3, \\
F^3 &= \int_L \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} dL = \mathbf{e}_3 \cdot \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} dq^1, \\
\mathbf{M}(x_3) &= \mathbf{e}_2 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} (\alpha - X_u^1) dq^1 - \mathbf{i}_1 \int_a^b \sqrt{G_{11}} G_{22} L^{22} (\gamma - X_u^2) dq^1.
\end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, что в силу произвольности сечений при любом изгибе внешние силы F_A и F_B уравниваются только при равенстве нулю каждой из них (рис. 9). Следовательно, внешние моменты M_A и M_B не зависят от выбора точки приложения и равны между собой.

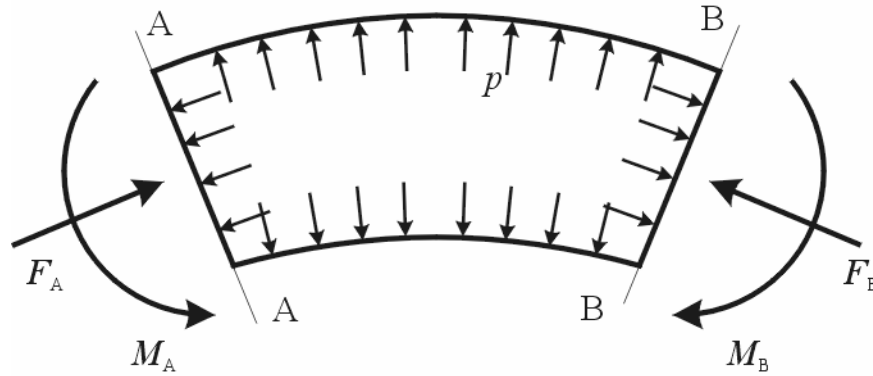


Рис. 9. Внешняя нагрузка на сечениях оболочки

В п. 3.2 рассматривается случай круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h из неогукковского материала с постоянной c_1 , для которой функции $x_1(q^1)$ и $x_2(q^1)$ из уравнений (16) заданы в форме

$$x_1(q^1) = r_0 \sin(q^1), \quad x_2(q^1) = r_0 \cos(q^1), \quad 0 \leq q^1 \leq 2\pi, \quad (22)$$

где $r_0 = const$ – радиус цилиндра.

Внешняя нагрузка, соответствующая равномерно распределенному нормальному давлению интенсивности p , задается с помощью уравнений

$$\xi = -p, \quad \xi^1 = \xi^2 = 0. \quad (23)$$

В задаче об изгибе имеют место следующие определяющие параметры

$$r_0, h, c_1, p, \beta, \quad (24)$$

где r_0 – радиус оболочки, h – её толщина, c_1 – постоянная материала, p – интенсивность давления, β – погонный (т. е. рассчитанный на единицу длины оси оболочки) угол поворота сечения оболочки при её изгибе.

Параметр β можно назвать также кривизной оси деформированной оболочки. Из пяти параметров (24) можно образовать две безразмерные независимые комбинации:

$$p^* = \frac{pr_0}{c_1 h}, \quad \beta^* = \beta r_0. \quad (25)$$

Тогда безразмерные величины деформированной оболочки

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{r_0}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{r_0}, \quad M^* = \frac{M}{c_1 r_0^2 h}, \quad F^* = \frac{F}{c_1 r_0 h}, \quad (26)$$

$$T_{11}^* = \frac{G_{11} L^{11}}{c_1 h}, \quad T_{22}^* = \frac{G_{22} L^{22}}{c_1 h}, \quad H^* = \frac{H}{h}, \quad S^* = \frac{S}{\pi r_0^2}$$

не зависят от геометрических размеров и постоянной материала. Здесь M – проекция вектора главного момента \mathbf{M} на ось i_1 ; в силу симметрии задачи относительно оси e_2 другая компонента равна нулю; F – величина равнодействующей \mathbf{F} ; $H = H(q^1)$ – толщина деформированной оболочки; S – площадь её поперечного сечения.

Таким образом, в задаче об изгибе круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, состоящей из неогуковского материала, выполняются условия подобия.

В дальнейшем, рассматриваются только безразмерные величины, определяемые соотношениями (25) и (26), и обозначавший их индекс «*» будет опускаться.

Формы сечений деформированной оболочки для разных величин давления и изгиба представлены на рисунке 10. По оси абсцисс отложен параметр α . По оси ординат отложена величина $(\gamma - \gamma_c)$, где γ_c – средняя координата сечения. В силу симметрии задачи на рисунке 10 отображены только половины сечений оболочки. Пунктирной линией обозначена форма недеформированного сечения. Параметры изображенных на рисунке 10 графиков приведены в таблице 2. Номера в первой колонке таблицы 2 соответствует номерам кривых на рисунке 10 – 13.

Таблица 2. Значения параметров для графиков представленных на рисунках 10 – 13

№	p	β
1	1.0	0.005
2	1.0	0.3
3	1.0	0.4
4	0.2	0.005
5	0.2	0.12
6	0.2	0.2

Изменение толщины оболочки показано на рисунке 11. Максимальное утончение будет происходить в точке $q^1 = 0$. В точке $q^1 = \pi$ деформированная оболочка будет иметь максимальную толщину, которая, начиная с некоторой величины изгиба, будет превосходить начальную толщину оболочки.

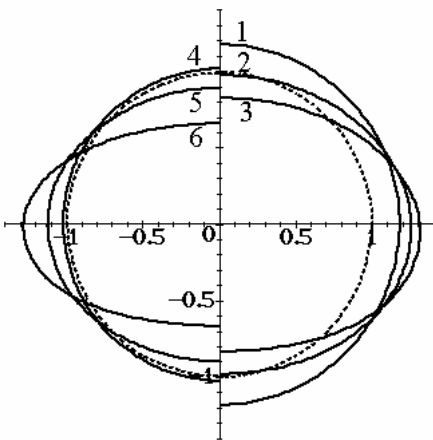


Рис. 10. Форма сечения изогнутой оболочки

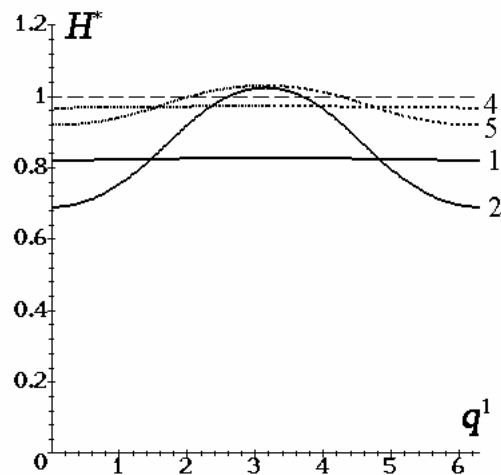


Рис. 11. Толщина изогнутой оболочки

Напряжения в оболочке представлены на рисунках 12 – 13. Из рисунка 13 видно, что в оболочке возможно появление сжимающих напряжений.

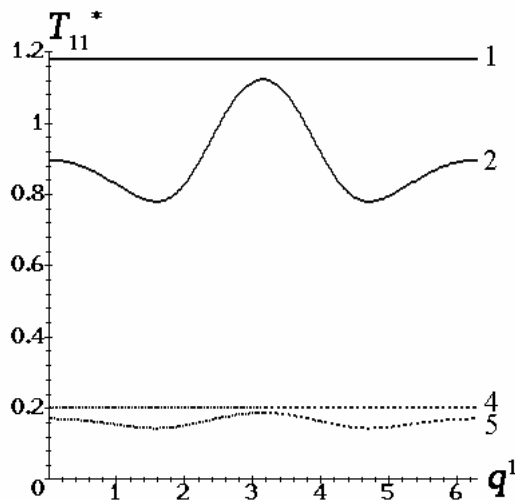


Рис. 12. Напряжения T_{11}

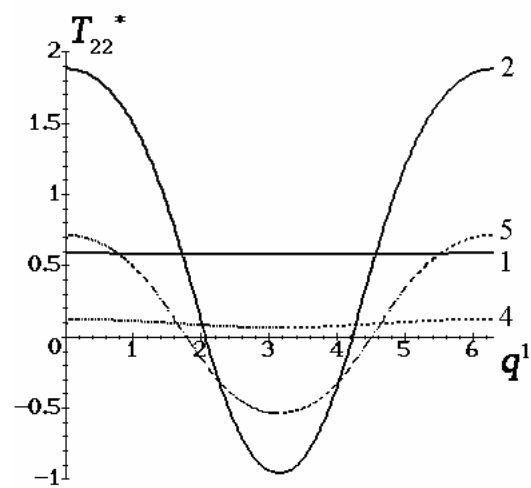


Рис. 13. Напряжения T_{22}

В силу симметричности задачи относительно оси координат, направленной по орту e_2 , главный момент будет направлен вдоль вектора i_1 . Момент сил вычисляем относительно центра тяжести сечения оболочки с помощью уравнения (26).

На рисунке 14 кривые, отмеченные точками, представляют зависимость абсолютной величины внешнего изгибающего момента M от кривизны оси деформированной оболочки β для различных давлений. По оси абсцисс отложена кривизна β , по оси ординат – изгибающий момент M (26). Величины давления p представлены на рисунке.

Численные результаты свидетельствуют о том, что рост внутреннего давления приводит к увеличению изгибной жесткости исследуемой упругой конструкции. Кроме того, величина момента в зависимости от кривизны имеет точку максимума для всего рассматриваемого диапазона величин давления. Кривая этой зависимости обозначена на рисунке 15 крестиками.

Зависимость величин кривизны оболочки, соответствующих максимальному изгибающему моменту, от давления представлена на рисунке 16 также крестиками.

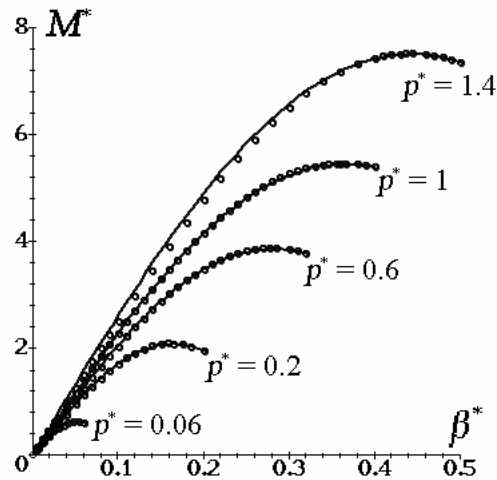


Рис. 14. Зависимость изгибающего момента от кривизны для различных давлений

Для вычисления величины максимального изгибающего момента и соответствующей ему кривизны в зависимости от величины давления предлагаются следующие приближенные формулы, справедливые в диапазоне изменения давления $p \in [0, 1.4]$:

$$M_{\max} = 4.77\sqrt{p} + 0.68p^2, \quad (27)$$

$$\beta_{\max} = 0.364\sqrt{p}.$$

На рисунках 15 и 16 кривые, представленные сплошными линиями, соответствуют формулам (27). Абсолютная величина относительной погрешности предложенных формул с численными результатами для изгибающего момента составляет менее 5% при давлении $p < 0.2$ и 2% – при $p \in [0.2, 1.4]$. Для величины соответствующей кривизны погрешность составляет 2%.

Появление в оболочке сжимающих напряжений происходит задолго до достижения максимальной величины изгибающего момента. На рисунке 15 точками отмечены кривые изгибающих моментов, которые соответствуют появлению сжимающих напряжений. Соответствующие им кривизны изображены на рисунке 16 также точками. Для приблизительного расчета этих величин в диапазоне

давления $p \in [0.1, 1.4]$ предлагаются следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} M_T &= 0.0103 + 1.596p + 0.876p^3 \\ \beta_T &= 0.001 + 0.078p + 0.03p^3 \end{aligned} \quad (28)$$

На рисунках 15 и 16 графики функций (28) представлены пунктирными линиями. Погрешность предложенного приближения составляет 5% от расчетных данных при $p \in [0.1, 1.4]$. Для $p < 0.1$ формулы (28) неприменимы.

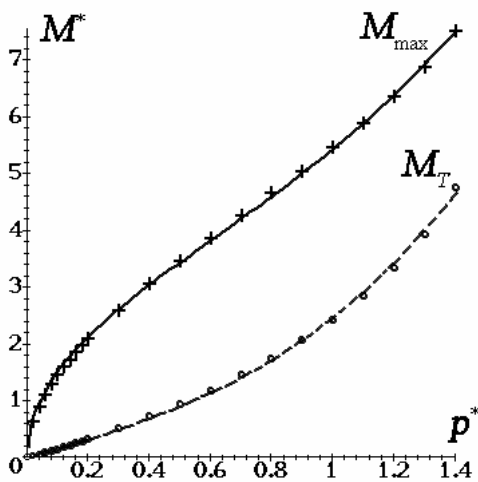


Рис. 15. Зависимость максимального момента M_{\max} и изгибающего момента M_T , соответствующего появлению сжимающих напряжений, от давления

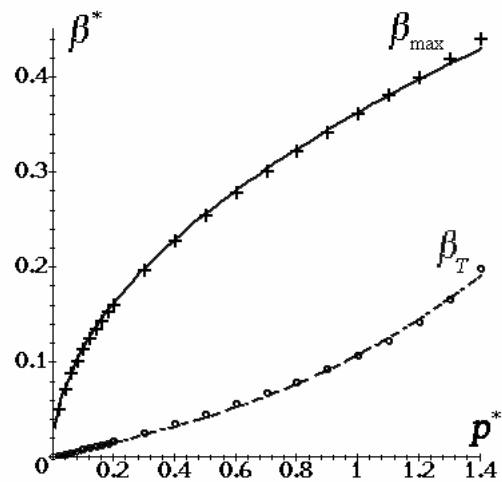


Рис. 16. Зависимость кривизны β_{\max} , соответствующей максимальному изгибающему моменту, и кривизны β_T , соответствующей появлению сжимающих напряжений, от давления

На основе результатов численного моделирования для расчета изгибающего момента в зависимости от кривизны и давления, получено выражение

$$M = |M_{\max}| \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\beta}{\beta_{\max}}\right). \quad (29)$$

Здесь M_{\max} и β_{\max} для соответствующей величины давления определяются из уравнений (27). Формула приближенного вычисления

изгибающего момента (29) на всем диапазоне рассмотренных давлений $p \in [0, 1.4]$ дает погрешность около 5% по сравнению с численными экспериментами. На рисунке 14 сплошными линиями изображена зависимость $M(\beta)$ (29), а точками отмечены кривые, полученные из численного решения задачи об изгибе.

В четвертой главе рассматривается экспериментальное исследование раздувания автомобильной камеры и предлагается вид потенциала, описывающего материал камеры. Измеряемыми параметрами в эксперименте были величина давления и геометрические характеристики деформированной оболочки («внешний» и «внутренний» радиусы камеры, максимальная «высота» камеры).

Уравнение поверхности оболочки до деформации представляется в форме (10) с помощью функций r и z , заданных в виде

$$r(\theta) = r_0 + r_1 \sin \theta, \quad z(\theta) = r_2 \cos \theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \quad (30)$$

$$r_0 = 3.677, \quad r_1 = 1.0, \quad r_2 = 0.963.$$

Здесь за координату q^1 взят угол θ , отсчитываемый по меридиану оболочки.

По толщине камера неоднородна и по результатам измерений закон изменения толщины задан в виде

$$h = h_1 + h_0 \cos 2\theta, \quad h_1 = 0.026, \quad h_0 = 0.0026.$$

В качестве потенциальной энергии рассматривается существенно нелинейный потенциал в форме

$$W^* = \frac{\mu}{4} \left[(1 + \beta)(I_1 - 3)^\alpha + (1 - \beta)(I_2 - 3)^\alpha \right]. \quad (31)$$

Представлены результаты для материала с постоянными равными

$$\mu = 7.64 \text{ МПа}, \quad \beta = 0.73, \quad \alpha = 0.9. \quad (32)$$

Геометрические характеристики (30), обезразмеренные относительно радиуса сечения в плоскости $z = 0$ ($r^* = 5.7688$ см), соответствуют параметрам автомобильной камеры R13.

На рисунках 17–19 результаты экспериментальных измерений представлены точками, численные расчеты сплошной линией. Сравнение численных расчетов и экспериментальных данных показывают хорошее соответствие предлагаемого потенциала (31) и упругих констант (32) материалу исследуемой автомобильной камеры.

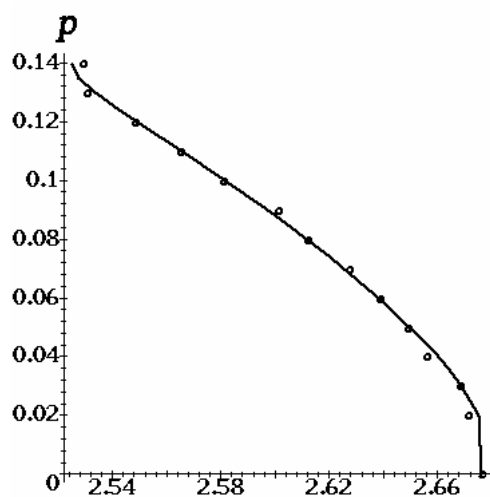


Рис. 17. Внутренний радиус – давление

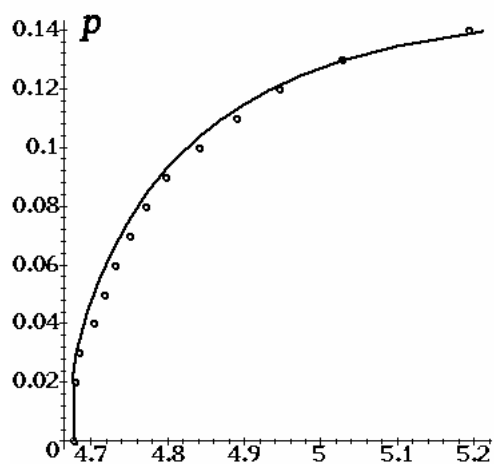


Рис. 18. Внешний радиус – давление

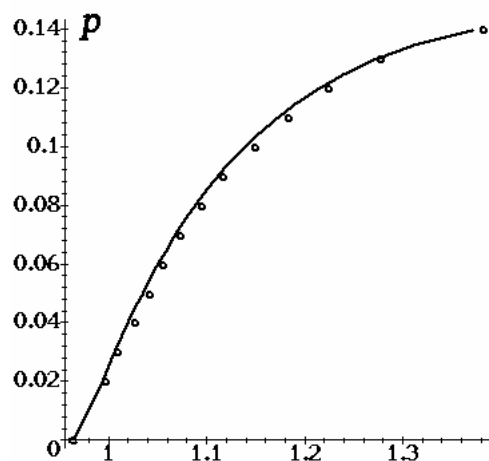


Рис. 19. Высота – давление

Основные результаты и выводы.

В диссертации были получены следующие основные результаты:

1. Сформулирован подход к решению класса задач нелинейной теории оболочек с помощью сведения двумерной краевой задачи к одномерной.

2. Получена разрешающая система одномерных уравнений равновесия оболочек вращения под действием осесимметричного нагружения в терминах кратностей удлинений и еще одной функции координат. Решён ряд задач об осесимметричной деформации оболочки вращения, в том числе, раздувание плоской круглой мембраны, раздувание торообразной оболочки, раздувание и растяжение цилиндрической оболочки.

3. Решена задача об изгибе цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением, в нелинейной постановке. Получена разрешающая система одномерных уравнений равновесия для оболочки произвольного сечения, изготовленной из произвольного несжимаемого материала.

4. В задаче изгиба оболочки из неогукковского материала найдено семейство независимых безразмерных параметров, для которых доказано подобие характеристик напряженно-деформированного состояния.

5. Произведены численные расчеты напряженно-деформированного состояния раздуваемой изогнутой круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из неогукковского материала.

6. Для круговой цилиндрической оболочки из неогукковского материала выведены приближенные зависимости изгибающего момента от давления и кривизны оси оболочки, а также максимального изгибающего момента от давления.

7. Выполнено экспериментальное исследование тороидальной оболочки и проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Зубов Л. М., Колесников А. М.* Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. №1.– С. 33–36.
2. *Колесников А. М.* Большие деформации высокоэластичной мембраны // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Том VIII.– Ростов-на-Дону: Изд.-во. Рост. Ун-та. 2002.– С. 12–15.
3. *Колесников А. М.* Большие деформации высокоэластичной тороидальной оболочки // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Том IX.– Ростов-на-Дону: Изд.-во. Рост. Ун-та. 2003.– С. 33–35.
4. *Колесников А. М.* Большие деформации гибкой оболочки вращения // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. гг. Ростов-на-Дону – Азов, 13-16.10.2003. – Ростов-на-Дону: Новая книга. 2004.– С. 219–222.
5. *Колесников А. М.* Большие деформации торообразных оболочек // Сборник докладов 16 симпозиума “Проблемы шин и резинокордных композитов”. Том 1.– Москва. 17–21.10.2005. ООО “Научно технический центр “НИИШП”.– С. 201–208.
6. *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Pure bending of a cylindrical membrane with internal pressure // Proceeding of the 8th conference: Shell Structures: Theory and Applications. Jurata. Poland. 12–14 October 2005.– Taylor & Francis Group. London. 2005. ISBN 0 415 38390.– pp. 129-133.