На правах рукописи

Ломакин Денис Евгеньевич

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01. 01. 01. — МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону

2006

Работа выполнена на кафедре алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Секерин Алексей Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кондаков Владимир Петрович

кандидат физико-математических наук, доцент Михайлов Андрей Борисович

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН

Защита состоится 19 декабря 2006 года в 16 ч. 50 мин. на заседании диссертационного совета К 212.208.06 в Ростовском государственном университете по адресу:344090, Ростов-на-Дону, по адресу: ул. Мильчакова, 8а, РГУ, ауд.311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ростовского государственного университета по адресу: г.Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан "   " ноября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 212.208.06 Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Преобразование Радона было введено И. Радоном в статье, опубликованной в 1917 году. Оно сопоставляет функции f на плоскости функцию $\hat{f}$ на множестве всех прямых, задаваемую интегралами от f вдоль прямых. И. Радону удалось получить явную формулу обращения, выражающую функцию f через $\hat{f}$. Аналоги этого преобразования, названного впоследствии преобразованием Радона, встречались и ранее, например, в работах Г.А. Лоренца, Г. Минковского и П. Функа, однако именно в статье Радона была поставлена задача об изучении преобразований типа $f \to \hat{f}$ на различных пространствах и намечены методы исследования таких преобразований.

Тем самым было положено начало новому направлению, часто называемому интегральной геометрией, предмет которой состоит в изучении преобразований, сопоставляющих для данной функции f на многообразии X функцию $\hat{f}$ на некотором семействе $\hat{X}$ подмногообразий многообразия X, задаваемую интегралами от f вдоль подмногообразий этого семейства. Задачи указанного типа часто встречаются в различных областях математики (дифференциальные уравнения, математическая физика, теория представлений и т.д.), что в значительной степени стимулировало развитие этого направления.

Преобразование Радона нашло применение в рентгеновской диагностике, точнее в ее области — вычислительной томографии, а также в геофизике и радиоастрономии.

Преобразование Радона является объектом исследования в течение достаточно длительного периода. Свойства преобразования Радона на пространствах распределений исследовались в работах И.М. Гельфанда, М.М. Граева, Н.Я. Виленкина, С. Хелгасона , А. Хертле, Д. Людвига, С.Г. Гиндикина, А.Г. Сергеева, А.Б. Секерина, и др. Следует отметить, что, в отличие от действительного случая, комплексное преобразование Радона распределений мало изучено.

В диссертации изучаются свойства преобразования Радона распределений в комплексном пространстве, задаваемых регулярными функциями из пространств целых функций многих комплексных переменных.

Цели работы:

- Получение явного вида оператора, ставящего в соответствие произвольной целой функции (как обобщенной) ее преобразование Радона.

- Выделение класса функций, в котором преобразование Радона целых функций определяестся единственным образом.

- Описание образа преобразования Радона пространства всех целых функций $H(\mathbb{C}^n)$, а также весовых пространств целых функций индуктивного и проективного типов.

- Применение свойств пребразования Радона к вопросам полноты систем целых функций в различных пространствах целых функций многих переменных, к вопросу о разложении целых функций многих переменных в ряды типа рядов обобщенных экспонент.

- Описание образа преобразования Радона сопряженного пространства к пространству всех целых функций многих переменных. Представление преобразования Радона аналитического функционала рядом из функционалов, сходящимся в сильной топологии пространства сопряженного к пространству всех целых функций. Применение преобразования Радона аналитического функционала к изучению свойств решений многомерных уравнений свертки.

Методы исследования. В работе используются методы современного и классического функционального анализа, комплексного анализа.

Научная и практическая значимость. Результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут найти дальнейшее применение, например, в задачах разрешимости уравнений свертки в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных и в вопросах разложения целых функций многих переменных в ряды типа рядов обобщенных экспонент.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на научном семинаре кафедры алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета (руководитель — проф.

Секерин А.Б.), на научном семинаре лаборатории теории функций и функционального анализа Орловского государственного университета (руководитель — проф. Громов В.П.), на Воронежской зимней математической школе (2003, 2005 гг.), на Воронежской весенней математической школе (2004 г.), на семинаре кафедры математического анализа Ростовского государственного университета (руководитель — проф. Коробейник Ю.Ф., проф. Абанин А.В.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ.

Совместные работы [9,12] с научным руководителем Секериным А.Б. содержат результаты параграфов 2.3 и 2.4 главы 2. В [9] результаты о преобразовании Радона аналитических функционалов принадлежат Ломакину Д.Е., а Секерину А.Б. — результаты о представлении функций разностью логарифмических потенциалов (не связанные с темой данной диссертации), а также определение преобразования Радона аналитического функционала. В [12] Секериным А.Б. сделаны постановки основных задач и определены методы исследования, а автором доказательств основных результатов является Ломакин Д.Е.

Структура и объем диссертации. Дисертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 92 наименования. Общий объем диссертации — 155 листов машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена изучению свойств оператора преобразования Радона в пространствах целых функций.

В § 1.1. главы 1 приводится определение преобразования Радона аналитических функций, рассматриваемых как обобщенные функции.

Обозначения: S^{2n-1} - единичная сфера в $\mathbb{C}^n$, $d\sigma$ - элемент площади S^{2n-1} . Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ полагаем $\langle z, w\rangle = \Sigma z_i w_i$, $d\omega_{2n}$ - элемент объема в $\mathbb{C}^n$. Через $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых финитных в $\mathbb{C}^n$ функций. Для функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ через $\hat{\varphi}(s,\xi)$ будем обозначать комплексное преобразование Радона, которое задается равенством

$$\hat{\varphi}(s,\xi)=\int\limits_{\langle z,\xi\rangle=s}\varphi(z)d\lambda(z),\ (s,\xi)\in\mathbb{C}\times(\mathbb{C}^n\backslash\{0\}),$$

где $d\lambda$ — элемент площади на гиперплоскости $\{z\in\mathbb{C}^n:\langle z,\xi\rangle=s\}$.

Согласно известным свойствам преобразования Радона функций из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ верно $\hat{\varphi}(as,a\xi)=|a|^{-2}\hat{\varphi}(s,\xi), a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. В связи с этим мы будем отождествлять функцию $\hat{\varphi}(s,\xi)$ с ее сужением на $\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, которое будем обозначать $\hat{\varphi}(s,w), w\in S^{2n-1}$.

Пусть $R\mathcal{D}$ — векторное пространство, образованное комплексными преобразованиями Радона $\hat{\varphi}(s,w)$, функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Обозначим через M векторное пространство, образованное функциями вида

$$\psi(s,w)=\frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1}\partial\bar{s}^{n-1}}\hat{\varphi}(s,w),$$

где $\hat{\varphi}(s,w)\in R\mathcal{D}$. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{D}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, состоящее из функций непрерывных по совокупности переменных на $\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, бесконечно дифференцируемых и финитных по s . Пусть $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ — обобщенная функция. Преобразованием Радона обобщенной функции F называется продолжение на $\mathcal{D}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ линейного функционала, заданного на M и определяемого соотношением

$$(-1)^{n-1}b_n\langle\hat{F},\psi\rangle=\langle F,\varphi\rangle,$$

где $\psi(s,w)=\partial^{2n-2}/(\partial s^{n-1}\partial\bar{s}^{n-1})\hat{\varphi}(s,w)$.

Важным классом обобщенных функций являются аналитические функции. В данной работе в качестве пространств обобщенных функций будут рассматриваться пространства целых функций многих переменных. В книге И.М. Гельфанда, М.И. Граева, Н. Я. Виленкина показано, что преобразование Радона целой функции $F(z)$ (как обобщенной) может быть задано в виде $\hat{F}(s,w)=|s|^{2n-2}H(s,w),(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, где $H(s,w)$ — целая функция комплексного переменного s . При этом дано только нестрогое доказательство существования функции $H(s,w)$, но не описан характер зависимости функции $H(s,w)$ от параметра w.

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых в $\mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах, то есть, топология в $H(\mathbb{C}^n)$ задается с помощью системы полунорм:

$$\|f(z)\|_p = \max_{|z|\le p} |f(z)|;\ p = 1, 2, ...$$

Введем в рассмотрение следующие функциональные пространства.

Через $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций $f(s,w)$, $(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, непрерывных по совокупности переменных и целых по s в $\mathbb{C}$. Топологию в $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ зададим с помощью счетного набора норм

$$\|f\|_k = \max_{|s|\le k, w\in S^{2n-1}} |f(s,w)|;\ k = 1, 2, ...$$

Через $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций вида $f(s,w) = F(s\bar{w})$, где $F(z)\in H(\mathbb{C}^n)$. Топологию в $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ зададим системой норм

$$\|f\|_k = \max_{|s|\le k, w\in S^{2n-1}} |f(s,w)|;\ k = 1, 2, ...$$

Введем также пространство $|s|^{2n-2}H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, элементами которого являются функции вида $u(s,w) = |s|^{2n-2}f(s,w)$, где $f(s,w)\in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Топологию введем с помощью счетного набора норм

$$\|u\|_k = \max_{|s|\le k, w\in S^{2n-1}} \frac{|u(s,w)|}{|s|^{2n-2}} = \max_{|s|\le k, w\in S^{2n-1}} |f(s,w)|;\ k = 1, 2, ...$$

На пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, задаваемый формулой

$$[\mathcal{A}F](z) = \frac{1}{2\pi^n}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\frac{\partial}{\partial z_i} + jI\right)F(z), \tag{1}$$

где $I : H(\mathbb{C}^n)\to H(\mathbb{C}^n)$ — тождественный оператор. На пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ введем оператор $\mathcal{R}_0$ по следующему правилу:

$$[\mathcal{R}_0F](s,w) = (-1)^{n-1}b_n\frac{\bar{s}^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^s (s-t)^{n-2}[\mathcal{A}F](t\bar{w})dt,$$

где b_n — некоторая постоянная.

Теорема 1.2 *Оператор* $\mathcal{R}_0 : H(\mathbb{C}^n) \to |s|^{2n-2} H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ *задает преобразование Радона функции* $F(z)$ *из* $H(\mathbb{C}^n)$ *как обобщенной функции.*

В § 1.2. выделен класс функций, в котором преобразование Радона целых функций определяется единственным образом:

Теорема 1.3 *В классе функций* $|s|^{2n-2} H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ *преобразование Радона функции* $F(z)$ *из пространства* $H(\mathbb{C}^n)$ *определяется единственным образом*

В § 1.3. получена формула обращения для оператора $\mathcal{R}_0$ (теорема 1.4), дано полное описание образа преобразования Радона пространства всех целых функций многих переменных. Основным результатом данного параграфа является

Теорема 1.8 *Оператор* $\mathcal{R}_0$ *устанавливает топологический изоморфизм пространства* $H(\mathbb{C}^n)$ *на пространство* $|s|^{2n-2} H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

В § 1.4. дано полное описание образов преобразования Радона весовых пространств целых функций идуктивного типа.

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(|z|)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность радиальных плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$, неубывающая по k , то есть,

$$\varphi_k(|z|) \le \varphi_{k+1}(|z|) \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Последовательность Φ представляет собой *весовую последовательность индуктивного типа.*

Для веса $\varphi_k, k = 1, 2, ...$ введем банахово пространство

$$E(\mathbb{C}^n, \varphi_k) = \left\{ F(z) \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{\exp(\varphi_k(|z|))} < \infty \right\}.$$

В векторном пространстве $I(\mathbb{C}^n, \Phi) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E(\mathbb{C}^n, \varphi_k)$ введем топологию индуктивного предела пространств $E(\mathbb{C}^n, \varphi_k)$.

В дальнейшем будем предполагать, что последовательность Φ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, a > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, C > 0$ такие, что

$$\varphi_k(|z|) + a\ln(1+|z|) \le \varphi_m(|z|) + C;$$

2) $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, C > 0$ такие, что

$$\max_{|\lambda_j|\le 1, j=1,2,...,n} \varphi_k(|(z_1+\lambda_1, z_2+\lambda_2, ..., z_n+\lambda_n)|) \le \varphi_m(|z|) + C.$$

Из последних условий следует, что $I(\mathbb{C}^n, \Phi)$ замкнуто относительно дифференцирования и умножения на многочлен.

Через $I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$ обозначим пространство функций $f(s,w)$ из $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, удовлетворяющих для некоторого конечного k (зависящего от f) равномерной по $w \in S^{2n-1}$ оценке

$$|f(s,w)| \le C_f \exp(\varphi_k(|s|)),$$

где C_f — некоторое положительное число. Топологию в $I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$ зададим как топологию индуктивного предела нормированных пространств

$$E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \varphi_k) =$$

$$= \{f(s,w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) : \|f\|_k = \sup_{(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}} \frac{|f(s,w)|}{\exp(\varphi_k(|s|))} < \infty\}.$$

Введем так же пространство $|s|^{2n-2} I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$ состоящее из функций вида $u(s,w) = |s|^{2n-2} f(s,w)$, $(s,w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}$, где $f(s,w) \in I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$

Топологию в $|s|^{2n-2} I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$ зададим как топологию индуктивного предела нормированных пространств

$$|s|^{2n-2} E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \varphi_k) =$$

$$= \{u(s,w) = |s|^{2n-2} f(s,w) : f(s,w) \in E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \varphi_k),$$

$$\|u\|_k = \sup_{(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}} \frac{|f(s,w)|}{\exp(\varphi_k(|s|))} < \infty\}.$$

Основным результатом параграфа 1.4 является

Теорема 1.11 *Оператор* $\mathcal{R}_0$ *устанавливает топологический изоморфизм пространств* $I(\mathbb{C}^n, \Phi)$ *и* $|s|^{2n-2} I_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Phi)$.

В § 1.5. дано полное описание образов преобразования Радона весовых пространств целых функций проективного типа.

Пусть $\Psi = \{\psi_k(|z|)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность радиальных плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$, невозрастающая по k , то есть,

$$\psi_k(|z|) \geq \psi_{k+1}(|z|), \ \forall \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Последовательность Ψ представляет собой *весовую последовательность проективного типа.*

Для веса $\psi_k, k = 1, 2, ...$ введем банахово пространство

$$E(\mathbb{C}^n, \psi_k) = \left\{ F(z) \in H(\mathbb{C}^n) : \|F\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{\exp(\psi_k(|z|))} < \infty \right\}.$$

В векторном пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n, \Psi) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E(\mathbb{C}^n, \psi_k)$ введем топологию проективного предела пространств $E(\mathbb{C}^n, \psi_k)$. Всюду далее будем предполагать, что последовательность Ψ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall \ a > 0 \ \forall \ m \in \mathbb{N} \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ \exists \ C_1 > 0$ такие, что всюду в $\mathbb{C}^n$

$$\psi_k(|z|) + a \ln(1 + |z|) \leq \psi_m(|z|) + C_1;$$

2) $\forall \ m \in \mathbb{N} \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ \exists \ C_2 > 0$ такие, что всюду в $\mathbb{C}^n$

$$\max_{|\lambda_j| \leq 1, j=1,2,...,n} \psi_k(|(z_1 + \lambda_1, z_2 + \lambda_2, ..., z_n + \lambda_n)|) \leq \psi_m(|z|) + C_2.$$

Из этих условий следует, что $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n, \Psi)$ замкнуто относительно дифференцирования и умножения на многочлен.

Через $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Psi) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \psi_k)$ обозначим весовое пространство функций из $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ с топологией проективного предела нормированных пространств

$$E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \psi_k) =$$

$$= \{f(s,w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) : \|f\|_k = \sup_{(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}} \frac{|f(s,w)|}{\exp(\psi_k(|s|))} < \infty\}.$$

Введем также пространство $|s|^{2n-2}\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Psi)$ функций вида $|s|^{2n-2}f(s,w)$, где $f(s,w) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Psi)$. Топологию в $|s|^{2n-2}\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Psi)$ зададим как топологию проективного предела нормированных пространств

$$|s|^{2n-2}E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \psi_k) =$$

$$= \{u(s,w) = |s|^{2n-2}f(s,w) : f(s,w) \in E_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \psi_k),$$
$$\|u\|_k = \sup_{(s,w)\in\mathbb{C}\times S^{2n-1}} \frac{|f(s,w)|}{\exp(\psi_k(|s|))} < \infty\}.$$

Основным результатом параграфа 1.5 является

Теорема 1.14 *Оператор* $\mathcal{R}_0$ *устанавливает топологический изоморфизм пространств* $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n, \Psi)$ *и* $|s|^{2n-2}\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}, \Psi)$

Вторая глава посвящена применению некоторых свойст дуального преобразования Радона и свойств преобразования Радона аналитических функционалов к вопросам полноты систем целых функций, представления целых функций рядами, а также к изучению свойств решений многомерных уравнений свертки.

На пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, состоящем из функций, непрерывных на декартовом произведении $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$, рассмотрим оператор

$$[\mathcal{R}^* f](z) = \int\limits_{S^{2n-1}} f(\langle z, w\rangle, w) d\sigma(w).$$

Этот оператор называется оператором дуального преобразования Радона.

В § 2.1. оператор дуального преобразования Радона $\mathcal{R}^*$ применяется для конструктивного построения полных систем функций в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ по полным системам в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Введем нормированное пространство $H_{S^{2n-1}}$, состоящее из сужений на единичную сферу S^{2n-1} функций, аналитических в окрестности единичного шара $\bar{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, с нормой

$$\|g(w)\| = \max_{w\in\bar{B}^n} |g(w)| = \max_{w\in S^{2n-1}} |g(w)|.$$

Следующая теорема дает конструктивный способ построения полных систем функций в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$.

Теорема 2.1 *Пусть система функций* $\{f_q(s)\}_{q=1}^{\infty}$ *полна в* $H(\mathbb{C})$ *, система* $\{g_m(w)\}_{m=1}^{\infty}$ *— полна в* $H_{S^{2n-1}}$ *. Тогда система* $\{\mathcal{R}^*(f_q(s)\overline{g_m(w)})\}_{q,m=1}^{\infty}$ *полна в* $H(\mathbb{C}^n)$ *.*

Известно, что вопрос о полноте систем целых функций одного комплексного переменного во многих случаях сводится к теоремам единственности для аналитических функций. Так, например, если последовательность комплексных чисел λ_k сходится к некоторому числу λ_0 , то система функций $e^{\lambda_k z}$ полна во всей комплексной плоскости. Это вытекает из того, что целая функция экспоненциального типа, равная нулю на последовательности точек $\lambda_k, \lambda_k \to \lambda_0 \in \mathbb{C}$, тождественно равна нулю. В многомерном случае последнее утверждение не верно, поскольку нулевое множество целой функции многих переменных не является дискретным, а представляет собой некоторую поверхность. Таким образом, в вопросах полноты теорема 2.1 позволяет использовать одномерные эффекты в многомерном случае.

Возникает вопрос о виде полных системы функций в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$, построенных по различным полным системам функций из $H(\mathbb{C})$ и $H_{S^{2n-1}}$. В частности, если хотя бы одна из них представляет собой многочлен, то полученная система также является системой многочленов (теоремы 2.2 и 2.3). Но существуют и полные системы, построенные по теореме 2.1, отличные от систем многочленов. Пример полной системы функций, отличной от системы многочленов дает теорема 2.4.

Теоремы 2.5 и 2.6 являются аналогами теоремы 2.1 для весовых пространств индуктивного и проективного типа соответственно.

§ 2.2. посвящен распространению на многомерный случай результатов А.Ф. Леонтьева о разложении в ряды обобщенных экспонент произвольных целых функций одного комплексного переменного.

Фундаментальными трудами по теории рядов экспонент являются работы

А.Ф. Леонтьева. Вопрос о представлении функций рядами экспонент тесно связан также с теорией абсолютно представляющих систем и достаточных множеств. По указанному кругу вопросов следует отметить работы А.В. Абанина, Л.А. Айзенберга, В.П. Громова, Ю.Ф. Коробейника, В.В. Моржакова, В.В. Напалкова, А.Б. Секерина, и др.

Пусть $f(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ — целая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$ типа $\sigma \neq 0, \infty$, причем $a_k \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ и существует

$$\lim_{k\to\infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}.$$

Пусть $L(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ — целая функция типа $\sigma_1 \neq 0, \infty$ при уточненном порядке $\rho_1(r)$, $\rho_1(r) > \rho$, $F(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k s^k$ — целая функция. Пусть $A(L)$ — класс целых функций $F(s)$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(\frac{|b_{k-1}|}{|a_{k-1}|} + |\mu| \frac{|b_{k-2}|}{|a_{k-2}|} + ... + |\mu^{k-1}| \frac{|b_0|}{|a_0|} \right) < \infty,\ |\mu| < \infty.$$

Обозначим через $B(L)$ класс целых функций $F(s)$, коэффициенты b_k которых таковы, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k^{1/\rho}}{\varphi_1(k)} \sqrt[k]{|b_k|} < \frac{(\sigma e \rho)^{1/\rho}}{(\sigma_1 e \rho_1)^{1/\rho_1}},$$

где функция $r = \varphi_1(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho_1(r)}$, а $\rho_1 = \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r)$. На функцию $r = \varphi_1(t)$ наложим условие

$$\frac{t^{1/\rho}}{\varphi_1(t)} \to \infty,\ t \to \infty.$$

Последнее условие означает, что

$$r^{\rho_1(r)-\rho} = \frac{r^{\rho_1(r)}}{r^\rho} \to \infty,\ r \to \infty.$$

В дальнейшем будем предполагать, что все нули $\lambda_\nu, \nu = 1, 2, ...$ функции $L(\lambda)$ простые, причем $0 < |\lambda_\nu| \uparrow \infty$. А.Ф. Леонтьевым в установлены следующие результаты:

Сопоставим функции $F(s)$ ряд

$$F(s) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu f(\lambda_\nu s), \tag{2}$$

где

$$\alpha_\nu = \frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{L'(\lambda_\nu)},$$

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} + \mu \frac{b_{k-2}}{a_{k-2}} + ... + \mu^{k-1} \frac{b_0}{a_0} \right), \ \mu \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.7 *Для того чтобы ряд* (2) *сходился равномерно внутри плоскости к своей функции* $F(s)$ (*какова бы ни была* $F(s) \in B(L)$) *, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

$$1) \ f(\lambda s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{f(\lambda_k s)}{L'(\lambda_k)}$$

(*сходимость равномерная внутри плоскости*) *;*

$$2) \ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = \infty, \tag{3}$$

и существуют окружности $|\lambda| = q_k \uparrow \infty$ *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{q_k^\rho} \min_{|\lambda|=q_k} \ln |L(\lambda)| = +\infty. \tag{4}$$

Теорема 2.8 *Пусть* $F(s)$ *— целая функция. Имеется целая функция* $L(\lambda)$ *со свойствами* (3) *и* (4) *такая, что* $F(s)$ *входит в класс* $B(L)$.

Целью параграфа 2.2 является получение многомерного аналога теорем 2.7 и 2.8.

Пусть $g(s,w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$. Тогда из определения класса $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$ вытекает, что она представляется в виде $g(s,w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(\bar{w}) s^k$ где $P_k(w)$ — голоморфный многочлен, однородный степени k . Обозначим через $B(L, \mathbb{C}\times S^{2n-1})$ класс функций $g(s,w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}\times S^{2n-1})$, коэффициенты $P_k(\bar{w})$ которых таковы, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k^{1/\rho}}{\varphi_1(k)} \sqrt[k]{\max_{w\in S^{2n-1}} |P_k(\bar{w})|} < \frac{(\sigma e \rho)^{1/\rho}}{(\sigma_1 e \rho_1)^{1/\rho_1}}. \tag{5}$$

На пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, который задается формулой (1). Введем класс $B_{\mathcal{A}}(L)$ целых функций многих переменных $G(z)$ таких, что

$$[\mathcal{A}G](s\bar{w}) = g(s,w) \in B(L, \mathbb{C}\times S^{2n-1}).$$

А.Б. Секериным доказано, что верно $G(z) = [\mathcal{R}^* g](z)$, где $\mathcal{R}^*$ — оператор дуального преобразования Радона.

Пусть $G(z) \in B_{\mathcal{A}}(L)$. Сопоставим функции $g(s,w) = [\mathcal{A}G](s,w)$ ряд

$$g(s,w) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(w) f(\lambda_\nu s), \tag{6}$$

где

$$\alpha_\nu(w) = \frac{\omega_L(\lambda_\nu, g, w)}{L'(\lambda_\nu)}, \tag{7}$$

$$\omega_L(\mu, g, w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{P_{k-1}(\bar{w})}{a_{k-1}} + \mu \frac{P_{k-2}(\bar{w})}{a_{k-2}} + \ldots + \mu^{k-1} \frac{P_0(\bar{w})}{a_0} \right). \tag{8}$$

Тогда функции $G(z)$ будет соответствовать ряд

$$G(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{S^{2n-1}} \alpha_\nu(w) f(\lambda_\nu \langle z, w\rangle) d\sigma(w), \tag{9}$$

Во введеных обозначениях справедливы теоремы

Теорема 2.9 *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = -\infty, \tag{10}$$

и существуют окружности $|\lambda| = q_k \uparrow \infty$ *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{q_k^\rho} \min_{|\lambda|=q_k} \ln |L(\lambda)| = +\infty. \tag{11}$$

Тогда ряд (6) *сходится к функции* $g(s,w)$ *равномерно на компактах из* $\mathbb{C}\times S^{2n-1}$, *и ряд* (9) *также сходится к функции* $G(z)$ *равномерно на компактах из* $\mathbb{C}^n$.

Теорема 2.10 *Пусть* $G(z) \in H(\mathbb{C}^n)$. *Найдется целая функция* $L(\lambda) \in H(\mathbb{C})$ *со свойствами* (10) *и* (11) *такая, что* $G(z)$ *входит в класс* $B_{\mathcal{A}}(L)$.

Следующая теорема является следствием теорем 2.9 и 2.10.

Терема 2.11 *Любую функцию* $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ *можно разложить во всем* $\mathbb{C}^n$ *в ряд* (9) *при соответствующем выборе функции* $L(\lambda)$

В § 2.3. введено определение преобразования Радона аналитических функционалов. Описан образ преобразования Радона сопряженного пространства к пространству всех целых функций многих переменных.

Для пространства $H(\mathbb{C}^n)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций в стандартной топологии равномерной сходимости на компактах через $H'(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать пространство всех линейных непрерывных функционалов.

Назовем преобразованием Радона функционала $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ линейный функционал, заданный на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, и определяемый соотношением

$$\langle \mathcal{R}\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \mathcal{R}^*\varphi \rangle, \tag{12}$$

где $\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Теорема 2.12 *Функционал* $\mathcal{R}\mu$ *, задаваемый формулой* (12), *непрерывен в топологии* $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Через $H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Пусть $\mathrm{Ker}\mathcal{R}^*$ — ядро оператора $\mathcal{R}^*$, то есть,

$$\mathrm{Ker}\mathcal{R}^* = \{\varphi \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) : [\mathcal{R}^*\varphi](z) = 0\}.$$

Следующая теорема дает описание образа оператора $\mathcal{R} : H'(\mathbb{C}^n) \to H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Теорема 2.13 *Пусть* $f \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ *. Для того чтобы функционал* f *был преобразованием Радона* $\mathcal{R}\mu$ *некоторого функционала* $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ *, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной функции* $\varphi \in \mathrm{Ker}\mathcal{R}^*$ *было выполнено условие:*

$$\langle f, \varphi \rangle = 0.$$

Описание ядра оператора $\mathcal{R}^*$ дает теорема 2.14.

Определяющим множеством функционала $l \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ называется такое компактное подмножество K в $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$, что для любой окрестности ω множества K существует такая постоянная C_ω, что

$$|l(f)| \leq C_\omega \sup_{\omega} |f(s,w)|, \ \forall \ f(s,w) \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы о носителе для преобразования Радона функций и распределений (см. работы Д. Людвига, С. Хелгасона, А.Б. Секерина).

Теорема 2.15 *Пусть* $\mu \in H'(\mathbb{C}^n), \mathcal{R}_\mu \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ *— его преобразование Радона. Пусть* $\hat{K} = \{|s| \leq R\} \times S^{2n-1}$ *— определяющее множество функционала* $\mathcal{R}_\mu$ *. Тогда* $K = \{|z| \leq R\}$ *— определяющее множество функционала* μ *.*

В § 2.4. рассматриваются применения преобразования Радона аналитических функционалов к изучению свойств решений многомерных уравнений свертки в классе целых функций многих переменных.

Важным мотивом для изучения преобразования Радона было его применение к дифференциальным уравнениям в частных производных. Так, например, Д. Людвиг применял свои результаты при нахождении решения задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. В свою очередь его работа была стимулирована результатами Ф. Йона, П.Д. Лакса и Р.С. Филлипса.

С. Хелгасон рассматривал дифференциальные уравнения вида

$$Du = f, \tag{13}$$

где $f(x)$ — заданная функция из пространства быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$, D — некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Решение уравнения (13) сводилось им к решению уравнения

$$Dv = f_\omega, \tag{14}$$

где $f_\omega = \hat{f}(\langle x, w\rangle, w)$ — плоская волна в направлении w, $\hat{f}$ — преобразование Радона функции f, другими словами, она постоянна на каждой гиперплоскости, перпендикулярной w. Плоская волна в направлении w является функцией одной переменной. Кроме того, если v — плоская волна в направлении w, то таковой же является и Dv. Тем самым уравнение (14) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Доказано, что если существует решение v уравнения (14) гладко зависящее от w, то решение u уравнения (13) получатся из v при помощи формулы обращения для преобразования Радона.

В данном параграфе рассмотрена аналогичная задача для уравнений в классах аналитических функций, но в более общей постановке. Для класса целых функций многих комплексных переменных будем рассматривать уравнения свертки вида

$$\langle \mu, f(z+t)\rangle = g(t), \tag{15}$$

где $g(t) \in H(\mathbb{C}^n)$ — заданная функция, μ — некоторый аналитический функционал, действующий по переменной z. Частными случаями уравнений свертки являются линейные дифференциальные уравнения с частными производными, линейные разностные и дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами как конечного, так и бесконечного порядков, некоторые интегральные уравнения.

Уравнения свертки в комплексной области рассматривались в работах О.В. Епифанова, Ю.Ф. Коробейника, И.Ф. Красичкова-Терновского, А.С. Кривошеева, Б. Мальгранжа, А. Мартино, В.В. Моржакова, В.В. Напалкова, Л. Хермандера, Л. Эренпрайса, Р.С. Юлмухаметова и др.

В диссертации показано, что вопрос о разрешимости уравнения (15) сводится к вопросу о разрешимости некоторого одномерного уравнения свертки. Вопрос о решении полученного уравнения в данной работе не ставится.

На пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ рассмотрим оператор $\delta_s^p(0)$, $p \in \mathbb{N}$, который каждой функции $f(s, w) \in H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ ставит в соответствие функцию

$\psi(w) \in \mathcal{C}(S^{2n-1})$ по следующему правилу:

$$\psi(w) = \left. \frac{d^p}{ds^p} f(s,w) \right|_{s=0}.$$

Здесь $\mathcal{C}(S^{2n-1})$ — нормированное пространство, состоящее из всех функций $\psi(w)$ непрерывных на сфере S^{2n-1} с нормой

$$\|\psi(w)\| = \max_{w \in S^{2n-1}} |\psi(w)|.$$

Далее на пространстве $\mathcal{C}(S^{2n-1})$ рассмотрим функционал $w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n}$, который каждой функции $\psi(w) \in \mathcal{C}(S^{2n-1})$ ставит в соответствие комплексное число

$$\int\limits_{S^{2n-1}} \psi(w) w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n} d\sigma(w).$$

Тогда функционал $\delta_s^{|k|}(0) w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n}$, заданный на $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, представляет собой композицию оператора $\delta_s^{|k|}(0)$ и функционала $w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n}$. В лемме 2.6 показано, что $\delta_s^{|k|}(0) w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n} \in H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Самостоятельное значение имеет следующая теорема.

Теорема 2.16 *Преобразование Радона $\mathcal{R}_\mu$ функционала $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ представляется в виде*

$$\mathcal{R}_\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|k|=m} c_{k_1 k_2 ... k_n} \frac{\delta_s^{|k|}(0)}{k!} w_1^{k_1} w_2^{k_2} ... w_n^{k_n},$$

где $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n, k! = k_1! k_2! ... k_n!$, $c_{k_1 k_2 ... k_n} = \langle \mu, z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_n^{k_n} \rangle$, причем ряд сходится в сильной топологии пространства $H'_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

На пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ рассмотрим оператор $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{R}^*$, где $\tilde{\mathcal{A}} : H(\mathbb{C}^n) \to H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ задается по правилу: для $F(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ полагаем $[\tilde{\mathcal{A}} F](s,w) = [\mathcal{A} F](s\bar{w})$, а оператор $\mathcal{A}$ задается формулой (1). Назовем оператор $\mathcal{P} : H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) \to H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ оператором проектирования пространства $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ на пространство $H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$.

Пусть $\mu \in H'(\mathbb{C}^n)$ — некоторый аналитический функционал. На пространстве $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ рассмотрим оператор $(\mathcal{R}_\mu)_s$, который каждой функции $\varphi(s, w)$ ставит в соответствие функцию

$$(\mathcal{R}_\mu)_s[\varphi(s,w)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|k|=m} \frac{c_{k_1 k_2 \ldots k_n}}{k!} w_1^{k_1} w_2^{k_2} \ldots w_n^{k_n} \langle \delta_s^{|k|}(0), \varphi(s,w) \rangle, \tag{16}$$

где $c_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \langle \mu, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \rangle, k! = k_1! k_2! \ldots k_n!$.

Доказано (лемма 2.9), что оператор $(\mathcal{R}_\mu)_s$ задает непрерывное отображение пространства $H_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ в пространство $\mathcal{C}(S^{2n-1})$.

Основным результатом параграфа 2.4 является

Теорема 2.17 *Пусть $g(z) \in H(\mathbb{C}^n), \mu \in H'(\mathbb{C}^n)$. Уравнение (15) разрешимо в классе функций $f(z) \in H(\mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда в классе функций $\varphi(s, w) \in H_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ разрешимо уравнение*

$$\mathcal{P}[\langle (\mathcal{R}_\mu)_s, \varphi(s+\lambda, w) \rangle] = h(\lambda, w), \tag{17}$$

где $h(s, w) = [\mathcal{A} g](s\bar{w})$, а оператор $\mathcal{A}$ определяется формулой (1).

Как следует из теоремы 2.17, решения f и φ уравнений (15) и (17) существуют одновременно и связаны равенствами

$$f(z) = \int\limits_{S^{2n-1}} \varphi(\langle z, w \rangle, w) d\sigma(w), \ \varphi(s, w) = [\mathcal{A} f](s\bar{w}). \tag{18}$$

Функция $\varphi(\langle z, w \rangle, w)$ представляет собой комплексную плоскую волну в направлении w, то есть, она постоянна на каждой гиперплоскости, перпендикулярной w. Плоская волна в направлении w является функцией одного комплексного переменного.

Таким образом, любое решение уравнения (15) представляется в виде интеграла по сфере S^{2n-1} от плоской волны (18), где $\varphi(s, w)$ решение уравнения (17) (одномерного уравнения с параметром), непрерывно зависящее от $w \in S^{2n-1}$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.Б. Секерину за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Список работ по теме диссертации

[1] Ломакин Д.Е. К вопросу о дуальном преобразовании Радона // Вестник науки: Сборник научных работ преподавателей и аспирантов физико-математического факультета ОГУ. Выпуск 2. — Орел, 2002. — С. 20-23.

[2] Ломакин Д.Е. О дуальном преобразовании Радона в комплексном пространстве // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. — Воронеж: ВГУ, 2003, - С. 143.

[3] Ломакин Д.Е. Преобразование Радона целых функций многих переменных / Орл. гос. ун-т. — Орел, 2003. — 24 с. Деп. в ВИНИТИ 07.07.2003 г., №1276-В2003.

[4] Ломакин Д.Е. Преобразование Радона целых функций многих комплексных переменных // Электронный журнал "Исследовано в России", 227, С. 2410-2432, 2004 г. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/227.pdf

[5] Ломакин Д.Е. Теорема единственности для преобразования Радона целых функций многих переменных // Современные методы теории краевых задач. Материалы конференции. — Воронеж: ВГУ, 2004, - С. 135.

[6] Ломакин Д.Е. Преобразование Радона в весовых пространствах целых функций многих комплексных переменных / Орл. гос. ун-т. — Орел, 2005. — 26 с. Деп. в ВИНИТИ 27.04.2005 г., №620-В2005.

[7] Ломакин Д.Е. Свойства оператора преобразовании Радона в пространстве целых функций многих комплексных переменных // Современные мето-

ды теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. — Воронеж: ВГУ, 2005, - С. 145.

[8] Ломакин Д.Е. Оператор преобразования Радона целых функций многих комплексных переменных // Изв. вузов. Математика. — 2005. — №7, — С. 77-79.

[9] Секерин А.Б., Ломакин, Д.Е. Комплексное преобразование Радона распределений и функционалов // Владикавказский мат. журнал. 2005. Т7. Вып.3. С. 56-63.

[10] Ломакин Д.Е. Построение полных систем функций в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ // Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ. — Орел: ОГУ, Полиграфическая фирма "Картуш", 2006. Вып. 6. С. 91-102.

[11] Ломакин Д.Е. Применение оператора дуального преобразования Радона к вопросам полноты систем целых функций многих переменных и к вопросам разложения целых функций многих переменных в ряды типа рядов обобщенных экспонент / Орл. гос. ун-т. — Орел, 2006. — 25 с. Деп. в ВИНИТИ 29.06.2006 г., №871-В2006

[12] Секерин А.Б., Ломакин, Д.Е. Применения преобразования Радона аналитических функционалов к изучению свойств решений многомерных уравнений свертки / Орл. гос. ун-т. — Орел, 2006. — 24 с. Деп. в ВИНИТИ 29.06.2006 г., №872-В2006

Ломакин Д.Е.

Преобразование Радона аналитических функций:

Автореф.дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Ростов-на-Дону, 2006. — 24 с.

ОАО "Типография "Труд"

г.Орел, ул.Ленина, д.1.

Сдано в набор 07.11.06. Подписано в печать 07.11.06. Формат $60 \times 84/16$.

Объем 1 усл.п.л. Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Заказ №7415.