*На правах рукописи*

Сокол Дмитрий Григорьевич

# Асимптотическое поведение решений интегральных уравнений типа Вольтерра

01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ростов-на-Дону – 2007

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
Кубанского государственного университета

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | доктор физико–математических наук, доцент<br>**Пуляев Василий Фёдорович** |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико–математических наук, профессор<br>**Уртенов Махамет Али Хусеевич** |
| | кандидат физико–математических наук, доцент<br>**Авсянкин Олег Геннадиевич** |
| **Ведущая организация:** | Воронежский государственный университет |

Защита состоится « 3 » апреля 2007 г. в 16 час. 50 мин. на заседании диссертационного совета К 212.208.06 в Южном Федеральном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, факультет математики, механики и компьютерных наук Южного Федерального университета, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного Федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан «______» февраля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 212.208.06 Кряквин В.Д.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В диссертационной работе изучаются вопросы существования решений интегральных уравнений Вольтерра и их устойчивости в пространстве измеримых ограниченных в существенном функций, а также в наиболее интересных с точки зрения приложений его подпространствах: в пространстве функций, имеющих на бесконечности конечный (в частности, нулевой) предел по мере и в пространстве асимптотически периодических функций.

Основная часть результатов относится к линейным интегральным уравнениям Вольтерра и нелинейным уравнениям Вольтерра – Гаммерштейна общего вида. Другая часть работы посвящена изучению линейных интегральных уравнений Вольтерра с периодическими ядрами. В этой части работы изучаются разрешимость и устойчивость уравнений с периодическими ядрами в указанных пространствах. Периодические ядра обобщают естественным образом ядра, зависящие от разности аргументов, а порождаемые ими уравнения имеют много общего с уравнениями типа свёртки. Уравнения с такими ядрами возникают в различных приложениях. Такими уравнениями, например, описываются разного рода модели в биологии, механике и других естественных науках. Исследование корректности соответствующих моделей включает в себя изучение условий существования решений в различных классах пространств, устойчивости и асимптотического поведения решений.

Подобные вопросы для других классов уравнений и пространств изучались многими авторами (Н.В. Азбелев и его ученики, А.Б. Антоневич, Ю.Г. Борисович, В.Р. Винокуров, В.Ф. Пуляев, Ю.Н. Смолин, З.Б. Цалюк). Интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов рассматривали в своих работах Н. Винер и Э. Хопф, И.Ц. Гохберг и М.Г. Крейн, В.А. Дербенёв, Я.М. Ерусалимский, Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко, И.Б. Симоненко, Ю.И. Черский и другие. Прикладные аспекты теории свёрточных уравнений, возникающих в динамических задачах теории упругости, подробно исследовались в работах В.А. Бабешко, И.И. Воровича и их учеников.

**Цель работы.** Основные цели диссертационной работы состоят в следующем:

1) нахождение условий допустимости различных пар функциональных пространств для интегральных операторов Вольтерра;

2) получение условий разрешимости интегральных уравнений в наиболее важных с точки зрения приложений и теории пространствах;

3) нахождение условий, обеспечивающих действие оператора суперпозиции в пространствах функций, имеющих на бесконечности нулевой или конечный предел по мере, и исследование разрешимости уравнений Вольтерра – Гаммерштейна в этих пространствах;

4) исследование взаимосвязи допустимости и устойчивости для линейных интегральных уравнений Вольтерра;

5) исследование условий разрешимости и устойчивости уравнений с периодическими ядрами.

**Методы исследования.** В диссертационной работе, в основном, используются классические методы теории линейных операторов, функционального и гармонического анализа, а также результаты и подходы, развитые в работах В.Ф. Пуляева, З.Б. Цалюка. Принципиально важной при изучении интегральных уравнений с периодическими ядрами в пространстве измеримых ограниченных функций оказалась возможность сведения вопроса об обратимости операторов, порождающих эти уравнения, к обратимости элементов некоторой банаховой алгебры компактных операторнозначных функций.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие результаты:

– найдены достаточные, а в ряде случаев необходимые и достаточные, условия допустимости для интегральных операторов и уравнений Вольтерра пар пространств функций, имеющих на бесконечности нулевой или конечный предел по мере;

– указаны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие действие оператора суперпозиции в пространствах функций, имеющих на бесконечности нулевой или конечный предел по мере. Получены условия разрешимости уравнения Вольтерра – Гаммерштейна в указанных пространствах;

– получены условия допустимости пар пространств асимптотически периодических по мере функций для линейных интегральных операторов и уравнений Вольтерра с периодическими ядрами.

– для интегрального уравнения в пространстве измеримых ограниченных в существенном функций установлена связь между устойчивостью и допустимостью;

– найдены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра с периодическими ядрами.

Основные результаты работы являются новыми. Некоторые из утверждений, установленных для пространства измеримых функций, имеют аналоги в непрерывном случае.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты можно использовать при изучении интегральных, интегро – дифференциальных вольтерровых уравнений и уравнений математической физики, а также при исследовании описываемых такими уравнениями математических моделей.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Кубанского государственного университета (руководитель — профессор Цалюк З.Б.), на IV Северо – Кавказской региональной конференции «Функционально – дифференциальные уравнения и их приложения» (Махачкала, 1997), на Воронежских весенних математических школах «Современные методы в теории краевых задач» «Понтрягинские чтения IX, XII» (Воронеж, 1998, 2001), на VII Международной конференции «Математика. Экономика. Экология. Образование.» (Ростов-на-Дону, 1999), на Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2000), на Международной научной конференции «Нелинейный анализ и функционально – дифференциальные уравнения» (Воронеж, 2000), на V Казанской Международной летней школе – конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2001), на X Международной конференции «Математика. Экономика. Образование.» (Ростов-на-Дону, 2002), на III Всероссийской молодёжной научной школе – конференции «Лобачевские чтения – 2003» (Казань, 2003), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2005).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [12]. В работах [4], [9], выполненных совместно с

В.Ф. Пуляевым, ему принадлежит постановка задачи. Автору диссертации принадлежит выбор методов исследования и доказательства. В работах [10], [11] В.Ф. Пуляеву принадлежат постановка задачи и определение общих параметров исследования.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на 9 параграфов, и списка литературы, содержащего 55 наименований. Объём работы — 129 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** даётся общая характеристика работы и приводятся основные результаты диссертации.

В **первой** главе получены достаточные, а в ряде случаев необходимые и достаточные, условия допустимости для операторов

$$\left(\widetilde{K}x\right)(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds, \tag{1}$$

$$\Phi x = \varphi\Big(t, x(t)\Big) \tag{2}$$

пар пространств функций, имеющих на бесконечности нулевой или конечный предел по мере (пространства $\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ и $\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)$ соответственно).

Утверждения подобного рода представляют самостоятельный интерес. Каждое условие допустимости пары пространств для интегрального оператора является также условием допустимости соответствующей пары для уравнения в терминах резольвенты. В то же время, наличие условий допустимости для операторов позволяет рассматривать соответствующие интегральные уравнения как операторные в соответствующих пространствах и применять для их исследования различные принципы неподвижной точки.

Здесь же получены условия допустимости указанных пар пространств для уравнения

$$x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\varphi\Big(s, x(s)\Big)\,ds + f(t). \tag{3}$$

**Определение.** Функция $x(t)$ имеет предел $a \in \mathbb{R}^n$ по мере Лебега $\mu$ при $t \to \infty$, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдётся такое $T \geqslant a$, что выполняется неравенство: $\mu\{t \geqslant T : \|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \delta\} < \varepsilon$.

Будем использовать для этого предела обозначение: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) \overset{\mu}{=} a$.

Близкие классы пространств рассматривали С.Г. Самко и Н.К. Карапетянц.

Введём следующие пространства:

$\mathbf{BC}^n[a,\infty)$ — пространство непрерывных ограниченных отображений $x : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\geqslant a} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$;

$\mathbf{C}_0^n[a,\infty) = \{x \in \mathbf{BC}^n[a,\infty) : \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0\}$;

$\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty) = \{x \in \mathbf{BC}^n[a,\infty) : \lim\limits_{t\to\infty} x(t) \overset{\mu}{=} 0\}$;

$\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty) = \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty) \oplus \mathbb{R}^n$.

Относительно структуры функций из $\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ установлено следующее.

**Лемма 1.3.** *Пусть $x(t) \in \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$, $T > a$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие функции $x_0(t) \in \mathbf{C}_0^n[a,\infty)$ и $x_1(t) \in \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$, что $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ и выполнены следующие условия:*

1. *$x_0(t) \equiv x(t)$ при $t \in [a,T]$;*
2. *$\mu\{t \geqslant a : x_1(t) \neq 0\} < \varepsilon$;*
3. *$\|x_0\| \leqslant \|x\|$, $\|x_1\| \leqslant \|x\|$.*

В первой главе предполагается, что вещественная $n \times n$ - матрица $K(t,s)$ определена всюду в области $a \leqslant t, s < \infty$, $K(t,s) \equiv 0$ при $s > t$, при любом $t > a$ суммируема по $s$ на $[a,t]$, и

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_a^{t+1} \|K(t+h,s) - K(t,s)\|\, ds = 0.$$

**Определение.** Пара пространств $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ называется допустимой для оператора $A$ (уравнения $Ax = y$), если $A(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Y}$ $(\forall y \in \mathbf{Y}\ \exists x \in \mathbf{X} \Rightarrow Ax = y)$.

Для операторов (1) общего вида найдены достаточные условия, обеспечивающие допустимость пары $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)\right)$.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1.* $\sup\limits_{t\geqslant a}\int\limits_a^t \|K(t,s)\|\,ds<\infty$*;*

*2. Для каждого* $T>a$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int\limits_a^T (T-s)K(t,s)\,ds\right)\overset{\mu}{=}0$*;*

*3. Для любого замкнутого множества* $F\subset[a,\infty)$ *конечной меры и любого* $\delta>0$ *существует такое* $T_0$*, зависящее от* $F$ *и* $\delta$*, что*

$$\mu\left\{t\geqslant T_0:\int\limits_{F\cap[T_0,t]}\|K(t,s)\|\,ds\geqslant\delta\right\}<\infty.$$

*Тогда пара* $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)\right)$ *допустима для оператора* (1).

Аналогичное утверждение доказано также и для пары пространств $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)\right)$ (теорема 1.5).

В случае пространства $\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ для операторов с неотрицательным ядром найдены необходимые и достаточные условия.

**Теорема 1.2.** *Пусть ядро* $K(t,s)$ *неотрицательно. Для допустимости пары* $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)\right)$ *относительно оператора* $\widetilde{K}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

*1.* $\sup\limits_{t\geqslant a}\int\limits_a^t \|K(t,s)\|\,ds<\infty$*;*

*2. Для любого замкнутого множества* $F\subset[a,\infty)$ *конечной меры и любого числа* $\delta>0$

$$\mu\left\{t\geqslant a:\int\limits_{F\cap[a,t]}\|K(t,s)\|\,ds\geqslant\delta\right\}<\infty.$$

Для оператора суперпозиции (2), где функция $\varphi(t,\xi)$ непрерывна, найдены необходимые и достаточные условия действия в пространствах $\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ и $\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)$.

**Теорема 1.10.** *Для допустимости пары* $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)\right)$ *относительно оператора суперпозиции* $\Phi$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. *Для любого* $r>0$ *существует такое* $C$*, что при любых* $t\in[a,\infty)$ *и* $\xi\in\mathbb{R}^n : \|\xi\|\leqslant r$ *выполняется неравенство* $\|\varphi(t,\xi)\|\leqslant C$*;*

2. *Для любого* $\delta>0$ *существует такое* $r=r(\delta)>0$*, что*

$$\mu\left\{t\geqslant a:\max_{\|\xi\|\leqslant r}\|\varphi(t,\xi)\|\geqslant\delta\right\}<\infty.$$

**Теорема 1.11.** *Для допустимости пары* $\left(\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)\right)$ *относительно оператора суперпозиции* $\Phi$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. *Для любых* $r>0$ *и* $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ *найдется такое* $C=C(r,\xi_0)>0$*, что при всех* $t\in[a,\infty)$ *и* $\xi\in\mathbb{R}^n : \|\xi-\xi_0\|\leqslant r$ *выполняется неравенство*

$$\|\varphi(t,\xi)\|\leqslant C;$$

2. *Для любого* $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ $\varphi(t,\xi_0)\in\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)$*;*

3. *Для любых* $\delta>0$ *и* $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ *существует такое* $r=r(\xi_0,\delta)>0$*, что*

$$\mu\left\{t\geqslant a:\max_{\|\xi-\xi_0\|\leqslant r}\|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\xi_0)\|\geqslant\delta\right\}<\infty.$$

Условия допустимости пар пространств для операторов позволяют применить для исследования интегральных уравнений Вольтерра методы функционального анализа. Учитывая, что в рассматриваемых пространствах операторы Вольтерра могут быть вполне непрерывными лишь в исключительных случаях, применение методов неподвижной точки, основанных на компактности, здесь затруднено. Поэтому, один из наиболее результативных подходов заключается в применении к соответствующим уравнениям принципа сжатых отображений и его различных вариантов. Кроме того, при этом можно использовать также порядковые свойства положительных операторов.

В работе приведено одно из подобных утверждений. Под модулем матрицы (вектора) понимается матрица (вектор), составленная из модулей её элементов. Неравенства между матрицами (векторами) определяются покомпонентно.

**Теорема 1.12.** *Пусть $n \times n$ - матрица $K(t,s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 (1.5), а $n$-мерная вектор-функция $\varphi(t,\xi) = \varphi(t,\xi_1,\dots,\xi_n)$ — условиям теоремы 1.10 (1.11), и существует такая непрерывная на $[a,\infty)$ матрица $\omega(t)$, что*

$$\left|\varphi\Big(t,\xi\Big) - \varphi\Big(t,\eta\Big)\right| \leqslant \omega(t)|\xi-\eta| \qquad (\forall t \geqslant a,\ \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}^n).$$

*Тогда, если*

$$\sup_{t\geqslant a} \int\limits_a^t \|K(t,s)\|\,\|\omega(s)\|\,ds < \infty,$$

*и существует такое $T_0 \geqslant a$, что*

$$\int\limits_{T_0}^t |K(t,s)|\,\omega(s)\,ds \leqslant B \qquad (\forall t \geqslant T_0),$$

*где $B$ — $n\times n$ - матрица, собственные числа которой по модулю меньше 1, то уравнение (3) при любом свободном члене $f(t)$ из $\widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ $\Big(\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)\Big)$ имеет и притом единственное решение $x(t) \in \widetilde{\mathbf{C}}_0^n[a,\infty)$ $\Big(\widetilde{\mathbf{A}}_0^n[a,\infty)\Big)$.*

Во **второй** главе изучаются линейные интегральные операторы Вольтерра и соответствующие им уравнения с $\omega$-периодическим ядром $K(t,s)$ $(K(t+\omega,s+\omega) = K(t,s)$ при некотором $\omega > 0)$.

В этой главе операторы и уравнения изучаются в пространстве функций, асимптотически периодических по мере. Здесь найдены условия, обеспечивающие действие интегрального оператора в указанном пространстве, и изучены свойства этого оператора. Кроме того, указаны условия, при которых решения интегрального уравнения являются асимптотически периодическими по мере.

Введём следующие подпространства пространства $\mathbf{BC}^n[a,\infty)$:

$\mathbf{P}_\omega^n[a,\infty) \ = \{x \in \mathbf{BC}^n[a,\infty) : x(t+\omega) = x(t)\};$

$\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[a,\infty) \ = \mathbf{P}^n_\omega[a,\infty) \oplus \widetilde{\mathbf{C}}^n_0[a,\infty).$

Функции, принадлежащие пространству $\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[a,\infty)$, будем называть *асимптотически $\omega$ - периодическими по мере.*

**Лемма 2.2.** *Для того чтобы непрерывная и ограниченная на $[a,\infty)$ функция $x(t)$ принадлежала пространству $\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[a,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x(t+k\omega)\}$ сходилась по мере на $[a,\infty)$ к некоторой непрерывной функции $y(t)$.*

Как известно, если для оператора Вольтерра с разностным ядром допустима пара $\big(\mathbf{BC}^n[0,\infty),\ \mathbf{BC}^n[0,\infty)\big)$, то для него будут допустимыми и многие пары естественных подпространств пространства $\mathbf{BC}^n[0,\infty)$. Частично этими свойствами обладают и операторы Вольтерра с периодическими ядрами.

**Лемма 2.4.** *Если пара $\left(\widetilde{\mathbf{C}}^n_0[0,\infty),\ \mathbf{aP}^n_\omega[0,\infty)\right)$ допустима для оператора $\widetilde{K}x = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds$, то и пара $\left(\widetilde{\mathbf{C}}^n_0[0,\infty),\ \widetilde{\mathbf{C}}^n_0[0,\infty)\right)$ также допустима для этого оператора.*

Лемма 2.4 используется при доказательстве теоремы 2.2, в которой указаны необходимые, а также достаточные условия, обеспечивающие допустимость для линейного интегрального оператора $\widetilde{K}$ пары $\left(\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty),\ \widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty)\right)$.

**Теорема 2.2.** *Для допустимости пары $\left(\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty),\ \widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty)\right)$ относительно оператора $\widetilde{K}$ необходимо, чтобы выполнялись условия:*

1. $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t \|K(t,s)\|\,ds < \infty;$

2. *Функции* $\varphi_k(t) = \int\limits_{-\infty}^0 K(t,s)\exp\left(i\dfrac{2k\pi}{\omega}s\right)ds$ *(*$i=\sqrt{-1},\ k = 0,1,\ldots$*) непрерывны на* $[0,\infty)$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_k(t) \overset{\mu}{=} 0;$

3. $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^\omega K(t,s)s\,ds \overset{\mu}{=} 0.$

*Обратно, если выполнены указанные условия, и*

4. *Для любого замкнутого множества $F \subset [0,\infty)$ конечной меры и любого $\delta > 0$ существует такое $T_0$, зависящее от $F$ и $\delta$, что*

$$\mu \left\{ t \geqslant T_0 : \int\limits_{F \cap [T_0, t]} \|K(t,s)\|\, ds \geqslant \delta \right\} < \infty,$$

*то пара $\left(\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty),\ \widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty)\right)$ допустима для оператора $\widetilde{K}$.*

Следующее утверждение является более общим по сравнению с теоремой 1.12 в линейном случае, в то же время, её доказательство существенно использует рассуждения этой теоремы.

**Теорема 2.6.** *Пусть $\omega$ - периодическое ядро $K(t,s)$ удовлетворяет условиям 1–4 теоремы 2.2, и для некоторого натурального $m$ существует такая $n \times n$ - матрица $B$, собственные числа которой по модулю меньше 1, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $\int\limits_0^t |K_m(t,s)|\, ds \leqslant B$, где $K_m(t,s)$ — $m$-е итерированное ядро. Тогда пара $\left(\widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty),\ \widetilde{\mathbf{aP}}^n_\omega[0,\infty)\right)$ допустима для уравнения*

$$x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)\, ds + f(t). \tag{4}$$

В **третьей** главе уравнение (4) изучается в пространстве ограниченных измеримых функций. Несмотря на определённое сходство пространств непрерывных и измеримых ограниченных функций, в ряде задач обнаруживаются и существенные различия между ними. Так, например, в пространстве $\mathbf{L}^n_\infty(a,b)$ отсутствует «точечный функционал» (типа $f(x) = x(t_0)$). Это обстоятельство делает некоторые задачи, в частности, задачу о допустимости, более трудными в пространстве $\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$ по сравнению с пространством $\mathbf{BC}^n[a,\infty)$.

В данной главе устанавливается связь между устойчивостью и допустимостью для уравнения (4) в пространстве измеримых ограниченных функций. Ранее подобные результаты были получены для случая пространства непрерывных функций в работах В.Ф. Пуляева.

Введём следующие обозначения:

$\mathbf{L}_\infty^n(a,b)$ — пространство измеримых ограниченных отображений $x:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty}=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(a,b)}\|x(t)\|<\infty$;

$\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty) \;=\{x\in\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty):\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty}x(t)=0\}$;

$\mathbf{A}_0\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty) \;=\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)\oplus\mathbb{R}^n$.

**Определение.** Замкнутое подпространство $\mathbf{X}$ из $\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)$ обладает $L$-свойством, если единичный шар из $\mathbf{X}$ всюду плотен в некотором шаре (радиуса $r$) пространства $\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)$ относительно сходимости, порождаемой полунормами $p_b(x)=\int\limits_a^b\|x(s)\|\,ds$ $(b>a)$.

Пусть $n\times n$ - матрица $\Gamma(t,s)$ измерима на множестве $a\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty$, при почти всех $t$ суммируема по $s$ на $[a,t]$, и оператор $\widetilde{\Gamma}$ определяется равенством $\widetilde{\Gamma}x=\int\limits_a^t\Gamma(t,s)x(s)\,ds$. Следующее утверждение является существенным для дальнейших исследований.

**Теорема 3.2.** *Пусть замкнутое подпространство* $\mathbf{X}$ *из* $\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)$ *обладает* $L$*-свойством, и пара* $\big(\mathbf{X},\ \mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)\big)$ *допустима для оператора* $\widetilde{\Gamma}$*. Тогда оператор* $\widetilde{\Gamma}$ *непрерывен и справедливо неравенство*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,\infty)}\int\limits_a^t\|\Gamma(t,s)\|\,ds=\|\Gamma\|<\infty. \tag{5}$$

*Обратно, если для любого интегрального оператора Вольтерра, относительно которого допустима пара* $\big(\mathbf{X},\ \mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)\big)$*, следует* (5)*, то замкнутое подпространство* $\mathbf{X}$ *обладает* $L$*-свойством.*

Доказательство данной теоремы использует методику, развитую в работах В.Ф. Пуляева и З.Б. Цалюка. Из теоремы 3.2 вытекает, что если $\mathbf{X}$ — замкнутое подпространство из $\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)$, содержащее $\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)$, то для допустимости пары $\big(\mathbf{X},\ \mathbf{L}_\infty^n(a,\infty)\big)$ относительно оператора $\widetilde{\Gamma}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5).

Обозначим через $x_f(t)$ решение уравнения (4), соответствующее свободному члену $f(t)$.

**Определение.** Решение $x_{f_0}(t)$ называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $(f(t) - f_0(t)) \in \mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$ и $\|f(t) - f_0(t)\|_{\mathbf{L}_\infty} < \delta$ следует $(x_f(t) - x_{f_0}(t)) \in \mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$ и $\|x_f(t) - x_{f_0}(t)\|_{\mathbf{L}_\infty} < \varepsilon$.

**Определение.** Решение $x_{f_0}(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и из условия $\operatorname{vrai}\lim\limits_{t\to\infty}[f(t) - f_0(t)] = 0$ следует $\operatorname{vrai}\lim\limits_{t\to\infty}[x_f(t) - x_{f_0}(t)] = 0$.

Уравнение (4) называется устойчивым (асимптотически устойчивым), если устойчивы (асимптотически устойчивы) все его решения. Как и в случае непрерывных решений, из линейности уравнения следует, что оно устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда пара $\big(\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ $\big(\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)\big)$ допустима для этого уравнения. Это позволяет сформулировать критерии устойчивости и асимптотической устойчивости в терминах резольвенты. Для устойчивости (асимптотической устойчивости) уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы пара $\big(\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ $\big(\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)\big)$ была допустима для оператора $\widetilde{R}$, порождённого резольвентой этого уравнения.

Профессором З.Б. Цалюком было высказано предположение о том, что из устойчивости уравнения (4) и допустимости для оператора (1) пары $\big(\mathbf{X}\,,\ \mathbf{X}\big)$, где $\mathbf{X}$ — замкнутое подпространство из $\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$, обладающее $L$-свойством, следует допустимость этой пары и для уравнения (4). Нами обоснована справедливость этой гипотезы для подпространств $\mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$ и $\mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$.

**Теорема 3.8.** *Пусть ядро $K(t,s)$ устойчиво и пара $\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ допустима для оператора $\widetilde{K}$. Тогда пара $\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ допустима и для уравнения* (4).

**Теорема 3.9.** *Пусть ядро $K(t,s)$ устойчиво и пара $\big(\mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ допустима для оператора $\widetilde{K}$. Тогда пара $\big(\mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\,,\ \mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)\big)$ допустима и для уравнения* (4).

В **четвёртой** главе рассматриваются линейные интегральные операторы и уравнения Вольтерра с периодическими ядрами в пространстве измеримых асимптотически периодических функций. В отличие от результатов второй главы, где особенности пространства $\widetilde{\mathbf{aP}}{}^n_\omega[a,\infty)$ позволили указать лишь достаточные условия допустимости для интегральных операторов и уравнений, здесь найдены условия, являющиеся необходимыми и достаточными одновременно.

В задаче допустимости таких пар пространств для интегральных операторов имеются определённые преимущества по сравнению с пространствами непрерывных функций, что позволило получить завершённые результаты о допустимости этих пар пространств для интегральных операторов.

В то же время, измеримость функций в ряде задач вносит дополнительные трудности. Однако, накладывая на периодические ядра ряд естественных дополнительных требований, можно избежать возникающих при этом осложнений, с одной стороны, а с другой — применить для изучения соответствующих интегральных операторов и уравнений новые методы.

В первом параграфе уточнены условия действия операторов с периодическими ядрами в пространствах $\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty)$ и $\mathbf{A}_0\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$.

Определим следующие подпространства $\mathbf{L}^n_\infty(a,\infty)$:
$\mathbf{P}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty) = \{x(t)\in\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty) : x(t) = x(t+\omega)\}$;
$\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty) = \mathbf{P}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)\oplus\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty)$.

Функции из $\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$ называются асимптотически $\omega$-периодическими.

**Лемма 4.1.**

1. *Если $x(t)\in\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$ и $x_\omega(t)$ — её $\omega$-периодическая составляющая, то $\lim\limits_{k\to\infty} x(t+k\omega) = x_\omega(t)$ равномерно по $t\in[0,\infty)\setminus E$, где $E\subset[0,\infty)$ и $\mu(E)=0$.*

   *Обратно, если $x(t)\in\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$ и равномерно по $t\in[0,\omega]\setminus E$, где $\mu(E)=0$, существует $\lim\limits_{k\to\infty} x(t+k\omega)$, то $x(t)\in\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$.*

2. *Для того чтобы измеримая, ограниченная в существенном на $[0,\infty)$ функция $x(t)$ принадлежала пространству $\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{vrai}\lim\limits_{t\to\infty}[x(t+k\omega)-x(t)]=0$ равномерно относительно $k\in\mathbb{N}$.*

Имеет место также и утверждение, устанавливающее связь между допустимостью пар пространств $\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty),\ \mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)\big)$ и $\big(\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty),\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty)\big)$ для оператора $\widetilde{K}$ с периодическим ядром.

**Лемма 4.2.** *Если пара* $\left(\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty),\ \mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)\right)$ *допустима относительно оператора* $\widetilde{K}$, *то и пара* $\left(\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty),\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty)\right)$ *также допустима для этого оператора.*

Леммы 4.1 и 4.2 используются при доказательстве теоремы 4.3, в которой указаны необходимые и достаточные условия действия линейного интегрального оператора (1) с периодическим ядром в пространстве $\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)$.

**Теорема 4.3.** *Для того чтобы пара* $\left(\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty),\ \mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}^n_\infty(0,\infty)\right)$ *была допустима относительно оператора* $\widetilde{K}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. $\displaystyle \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\infty)} \int\limits_0^t \|K(t,s)\|\, ds < \infty;$

2. *Для любого измеримого* $A \subset [0,\omega]$ $\displaystyle \operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} \int\limits_A K(t,s)\, ds = 0;$

3. *Для любого измеримого* $A \subset [0,\omega]$ *ряд* $\displaystyle \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_A K(t+i\omega,s)\, ds$ *сходится равномерно по* $t \in [0,\omega]\setminus E$, *где* $\mu(E)=0$.

Во втором параграфе интегральные уравнения Вольтерра изучаются при некоторых дополнительных условиях на периодические ядра. Так как ядра, зависящие от разности аргументов, удовлетворяют этим условиям, то соответствующие ограничения можно считать естественными.

К рассматриваемому классу операторов с периодическими ядрами применяется некоммутативный вариант теоремы Винера об обратимости операторов, а именно — теорема Бохнера – Филлипса.

Предварительно изучается алгебра операторнозначных функций, позволяющая свести вопрос об обратимости операторов $I-\widetilde{K}$ в различных функциональных пространствах к обратимости соответствующих элементов этой алгебры.

Рассмотрим интегральные операторы Вольтерра

$$\left(\widetilde{L}x\right)(t) = \int\limits_0^t L(t,s)x(s)\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant \omega),$$

ядра $L(t,s)$ которых измеримы по совокупности переменных в области $0 \leqslant s \leqslant t < \omega$, $(L(t,s) \equiv 0$ при $s > t)$, при п. в. $t$ суммируемы по $s$ на $(0,t)$, и удовлетворяют условиям:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_0^t \|L(t,s)\|\, ds < \infty$$

и

$$\lim_{h\to+0}\left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_{\max\{0,\,t-h\}}^{t} \|L(t,s)\|\, ds\right) = 0.$$

Пусть $\Omega_0$ — наполненная банахова алгебра с единицей всех операторов вида $\lambda I + \widetilde{L}$ с нормой $\left\|\lambda I + \widetilde{L}\right\|_{\Omega_0} = |\lambda| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_0^t \|L(t,s)\|\, ds$, $\Omega_1$ — наполненная банахова алгебра операторов вида $\lambda I + \widetilde{P}$ с нормой $\left\|\lambda I + \widetilde{P}\right\|_{\Omega_1} = |\lambda| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_0^\omega \|P(t,s)\|\, ds$, где $\widetilde{P}$ — операторы Фредгольма $\left(\widetilde{P}x\right)(t) = \int_0^\omega P(t,s)x(s)\, ds$, ядра $P(t,s)$ которых измеримы по совокупности переменных на множестве $\{0 \leqslant s \leqslant \omega, 0 \leqslant t \leqslant \omega\}$, при п. в. $t$ суммируемы по $s$ на $(0,\omega)$, и

$$\|P\| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_0^\omega \|P(t,s)\|\, ds < \infty.$$

Обозначим через $\mathbf{F}$ банахову алгебру абсолютно сходящихся рядов $f(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ $\left(\xi \in D^1 = \left\{\xi \in \mathbb{C}^1 : |\xi| \leqslant 1\right\}\right)$ с нормой $\|f\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, а через $\mathbf{F}_1$ — банахову алгебру операторнозначных функций $x(\cdot) = x(\xi) = f(\xi)I + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{P}_n$, определённых на замкнутом единичном круге $D^1$, с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{F}_1} = \left\| f(\xi)I + \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{P}_n \right\|_{\mathbf{F}_1} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|,$$

где $f \in \mathbf{F}$, $\widetilde{P}_n$ — интегральные операторы из алгебры $\Omega_1$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{vrai\,sup}_{t\in(0,\omega)} \int_0^{\omega} \|P_n(t,s)\| \, ds < \infty.$$

В силу теоремы Бохнера – Филлипса элемент $x(\cdot) \in \mathbf{F}_1$ обратим, если значения функции $x(\xi)$ при любом $\xi \in D^1$ обратимы в $\Omega_1$.

Через $\mathbf{F}_0$ обозначим замкнутую подалгебру алгебры $\mathbf{F}_1$ операторнозначных функций вида $x(\cdot) = x(\xi) = cI + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{L}_n$, где $\widetilde{L}_n$ — интегральные операторы, причём $\widetilde{L}_0 \in \Omega_0$. Элемент $cI + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{L}_n$ из $\mathbf{F}_0$ обратим в $\mathbf{F}_1$, если при любом $\xi \in D^1$ операторы $cI + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{L}_n$ обратимы как элементы алгебры $\Omega_1$, причём обратный элемент принадлежит алгебре $\mathbf{F}_0$.

Пусть $n\times n$ - матрица $D(t,s)$ определена в области $-\infty < s \leqslant t < \infty$ ($D(t,s) \equiv 0$ при $s > t$), измерима по совокупности переменных, при почти всех $t$ суммируема по $s$ на $(0,t)$, и выполнены условия:

$$D(t+\omega, s+\omega) = D(t,s) \text{ при некотором } \omega > 0; \tag{6}$$

$$\|D\|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\omega} \int_0^{\omega} \|D(t, s-n\omega)\| \, ds < \infty; \tag{7}$$

$$\lim_{h\to+0} \left( \operatorname{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\omega} \int_{\max\{0,t-h\}}^{t} \|D(t,s)\| \, ds \right) = 0. \tag{8}$$

Обозначим через $\mathbf{A}_0$ банахову алгебру всех операторов вида $cI + \widetilde{D}$, где $\widetilde{D}$ — операторы Вольтерра, $\omega$-периодические ядра которых удовлетворяют условиям (6) – (8), с нормой $\left\| cI + \widetilde{D} \right\|_0 = |c| + \|D\|_0$.

Каждому оператору $cI + \widetilde{D}$ из $\mathbf{A}_0$ поставим в соответствие элемент $cI + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{D}_n$ из $\mathbf{F}_0$, где $\left(\widetilde{D}_0 x\right)(t) = \int\limits_0^t D(t,s)x(s)\,ds$ $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$,

$$\left(\widetilde{D}_n x\right)(t) = \int\limits_0^\omega D(t, s - n\omega)x(s)\,ds \ (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \omega).$$

Обозначим это отображение через $\Phi$. Оказывается, что $\Phi$ — изометрический изоморфизм банаховых алгебр $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{F}_0$, что даёт возможность использовать утверждение об обратимости в $\mathbf{F}_0$ для получения условий обратимости интегральных операторов из алгебры $\mathbf{A}_0$.

**Теорема 4.7.** *Для обратимости оператора $cI + \widetilde{D}$ в алгебре $\mathbf{A}_0$ необходимо и достаточно, чтобы операторнозначная функция $cI + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{D}_n$ была обратима при любом $\xi \in D^1$ в пространстве $\mathbf{L}_\infty^n(0,\omega)$.*

Операторы из алгебры $\mathbf{A}_0$ переводят пространство $\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty)$ в $\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty)$, что влечёт допустимость для операторов из алгебры $\mathbf{A}_0$ пары $\left(\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty),\ \mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty)\right)$, а следовательно, и пары $\left(\mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty),\ \mathbf{C}_0\mathbf{L}_\infty(0,\infty)\right)$.

Введём операторнозначную функцию $K(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi^n \widetilde{K}_n$, где операторы $\widetilde{K}_n x = \int\limits_0^\omega K(t, s - n\omega)x(s)\,ds : \mathbf{L}_\infty^n(0,\omega) \mapsto \mathbf{L}_\infty^n(0,\omega)$, и применим полученные результаты к исследованию устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t) \tag{9}$$

с периодическим ядром.

**Теорема 4.8.** *Если операторнозначная функция $I - K(\xi)$ обратима при всех $\xi \in D^1$, то уравнение (9) асимптотически устойчиво. При этом пара $\left(\mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty),\ \mathbf{aP}_\omega\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty)\right)$ допустима для этого уравнения.*

В случае локально компактных операторов справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 4.9.** *Пусть оператор $\widetilde{K}$ локально компактен в $\mathbf{L}_\infty^n(0,\infty)$, и уравнение (9) устойчиво. Тогда операторнозначная функция $I - K(\xi)$ обратима при всех $\xi \in D^1$.*

**Публикации по теме диссертации**


1. *Сокол Д.Г.* Существование решений интегральных уравнений Вольтерра, имеющих на бесконечности нулевой предел по мере // Вестник студенческого научного общества. Краснодар, 1997. С. 18–20.

2. *Сокол Д.Г.* О допустимости для интегральных операторов Вольтерра пары пространств функций, имеющих на бесконечности нулевой предел по мере // Вопросы функционального анализа и математической физики: Матер. науч. конф. Баку, 1999. С. 423.

3. *Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. №1. С. 135–137.

4. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра. Краснодар, 2000. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.2000, №814 – В00.

5. *Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра // Тр. математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2000. Т. 5. С. 193–194.

6. *Сокол Д.Г.* О допустимости пары пространств асимптотически $\omega$-периодических по мере функций для интегральных операторов и уравнений Вольтерра. Краснодар, 2001. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 04.06.2001, №1402 – В2001.

7. *Сокол Д.Г.* О разрешимости интегрального уравнения Вольтерра в пространстве асимптотически $\omega$-периодических по мере функций // Тр. математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 8. С. 215–216.

8. *Сокол Д.Г.* О разрешимости устойчивых интегральных уравнений Вольтерра в пространстве функций, стремящихся к нулю на бесконечности // Тр. математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2003. Т. 21. С. 189–191.

9. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* О взаимосвязи допустимости и устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. № 3. С. 14–16.

10. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* Интегральные уравнения с периодическими ядрами в пространстве измеримых функций. Краснодар, 2005. 33 с. Деп. в ВИНИТИ 20.07.2005, № 1063 – В2005.

11. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* О взаимосвязи допустимости и устойчивости для линейных интегральных уравнений Вольтерра. Краснодар, 2005. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 20.07.2005, № 1064 – В2005.

12. *Сокол Д.Г.* О разрешимости интегрального уравнения Вольтерра с периодическим ядром в $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R}_+)$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Матер. Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 2005. С. 215–216.

## Участие в конференциях (тезисы докладов по теме диссертации)

13. *Сокол Д.Г.* О существовании решений, стремящихся по мере к нулю, у интегральных уравнений типа Вольтерра // Функционально – дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. 4 Сев.-Кавк. регион. конф. Махачкала, 1997. С. 81.

14. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра // Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы в теории краевых задач» «Понтрягинские чтения – 9»: Тез. докл. Воронеж, 1998. С. 165.

15. *Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра // Математика. Экономика. Экология. Образование: Тез. докл. 7 Международной конф. Ростов н/Д, 1999. С. 37–38.

16. *Сокол Д.Г.* О допустимости одной пары пространств для оператора суперпозиции // Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения: Тез. докл. Международной науч. конф. Воронеж, 2000. С. 180–181.

17. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* О допустимости пары пространств асимптотически $\omega$-периодических по мере функций для интегрального оператора Вольтерра // Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы в теории краевых задач» «Понтрягинские чтения – 12»: Тез. докл. Воронеж, 2001. С. 127–128.

18. *Пуляев В.Ф., Сокол Д.Г.* Об обратимости периодических операторов и асимптотическом поведении решений уравнений Вольтерра // Математика. Экономика. Образование: Тез. докл. 10 Международной конф. Ростов н/Д, 2002. С. 80–81.